Una commedia degli errori
meno per meno fa più

Riccardo Rosso

Dipartimento di Matematica, Università di PAVIA

Sommario

- Si fa presto a dire zero
- La genesi dei numeri negativi
- Modelli di sistemi numerici: pregi e difetti
- La regola dei segni: teorema o principio?
- Numeri negativi senza numeri negativi

Duo et duo quattuor odiosa cantio mihi erat... (S. AGOSTINO, Confessioni, Libro I)

Quid est tempus? Si nemo ex me quaerat, scio. Si quaerenti explicare velim, nescio

(S. AGOSTINO, Confessioni, Libro XI)

Un cenno sul concetto di numero

EUCLIDE (300 a.C.), *Elementi*

Numero è una pluralità di unità.

Conseguenza: l'unità *non* è un numero.

Simon STEVIN (1548-1620)

Numero è ciò per cui si dichiara la quantità di qualcosa.

Come l'unità è il numero col quale la quantità di una cosa spiegata si dice uno: e due [il numero] col quale la si definisce due: e metà [il numero] col quale la si chiama metà: e radice di tre [il numero] col quale la si chiama radice di tre.... (*L'Arithmétique*, 1585)

Aritmetica vs. Algebra

Si chiama *quantità* tutto ciò che è suscettibile di operazioni. In aritmetica, non vi sono altre quantità al di fuori dei numeri naturali, frazionari ed incommensurabili. Si può pertanto dire che la nozione propria all'algebra, che la distingue dall'aritmetica, è la generalizzazione più estesa dell'idea di quantità.

(Maurice FOUCHÉ, 1893)

Colin Mc Laurin (1698-1746)

A treatise of Algebra (opera postuma 1748)

Quantità è ciò che è fatto di parti, o è in grado di essere maggiore o minore.

Addizione e sottrazione sono opposti ovvero un incremento è opposto ad un decremento: come un eccesso ed un difetto; denaro dato a una persona o dovuto da una persona; un segmento tracciato da sinistra a destra ed uno da destra a sinistra (...). Quando due quantità sono uguali in grandezza (Magnitude) ma di tipi (Kinds) diversi, sono messe insieme e si immagina agiscano su uno stesso soggetto, esse distruggono i rispettivi effetti ed il loro risultato ammonta a nulla (...) Quando una quantità maggiore viene tolta da una minore dello stesso tipo, ciò che resta diventa di tipo opposto.

Si fa presto a dire zero

Si possono dare tre significati allo zero

- traduce un'idea filosofica: il *nulla*
- rappresenta una posizione *vuota* all'interno di un sistema di numerazione *posizionale*
- rappresenta un *numero* sul quale è possibile svolgere delle *operazioni*

I numeri positivi non bastano

Dal punto di vista storico i numeri negativi giungono dopo i numeri (positivi) sia razionali che irrazionali

I numeri negativi servono in tutte le situazioni in cui, oltre alla *grandezza* occorre descrivere un *verso* di percorrenza

- crediti e debiti
- movimenti rettilinei in versi opposti
- passato e futuro
- la temperatura

I numeri positivi non bastano

Joseph Diaz GERGONNE (1771-1859)

Mi si chiederà ora se considero le quantità negative isolate come maggiori o minori di zero. (...) Distinguerò dapprima due tipi di zero, cioè lo zero assoluto, simbolo di un puro nulla, al di sotto del quale non può conseguentemente trovarsi alcunché, ed uno zero limite o punto di partenza, puramente convenzionale ed a cui si riferiscono sempre le quantità considerate come positive e negative. Tale è, ad esempio lo zero del termometro; il livello di riferimento da cui si parte per valutare rilievi ed avvallamenti; l'epoca da cui partono le cronologie per fissare la data degli eventi, sia anteriori che posteriori.

Albert GIRARD (1595-1632)

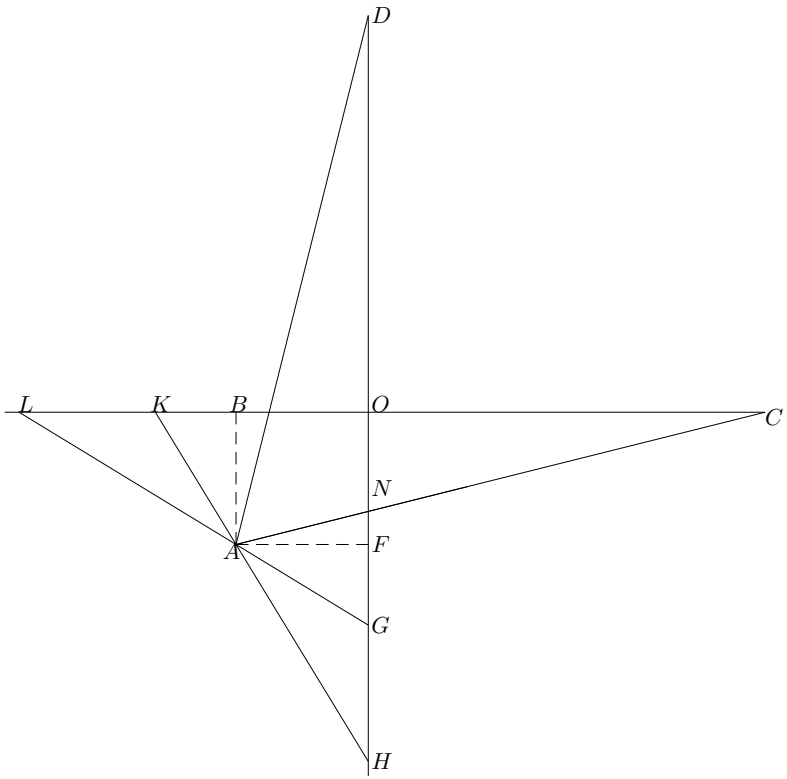
Invention Nouvelle en algèbre (1629)

Finora non abbiamo ancora spiegato a cosa servano le soluzioni negative, quando ve ne siano. La soluzione negativa si spiega in Geometria procedendo all'indietro, ed il segno meno indietreggia, laddove il segno + avanza.

Il problema di inclinazione

Sia A tale che $AF = AB = 4$.

Tracciare la retta per A in modo che la sua intercetta abbia lunghezza $\sqrt{153}$.



Posto $FN = x$, $x^4 = 8x^3 + 121x^2 + 128x - 256$

Digressione aritmetica

Introdotta l'addizione tra numeri *naturali* con le sue proprietà fondamentali (*associatività* e *commutatività*)

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad\qquad a+b = b+a$$

In *aritmetica* si può definire la sottrazione $a-b$ *purché* $a > b$.

Lo 0 emerge per dare un senso all'operazione $a-a$:

$$a-a =: 0$$

La moltiplicazione tra due numeri oltre alle proprietà associativa e commutativa

$$ab = ba \qquad\qquad a(bc) = (ab)c$$

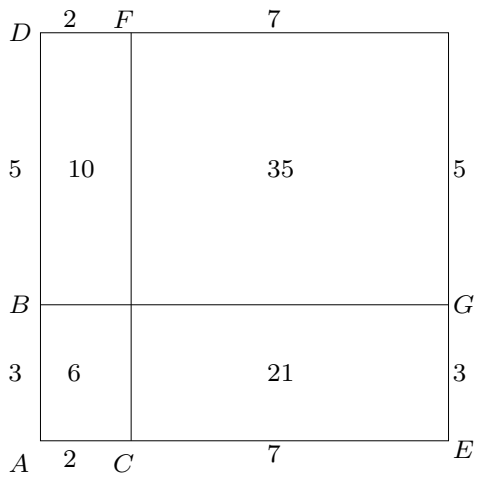
si lega all'addizione con la proprietà *distributiva*

$$a(b+c) = ab+ac$$

Regola dei segni in *aritmetica*

Rafael BOMBELLI (?-1572?), Simon STEVIN

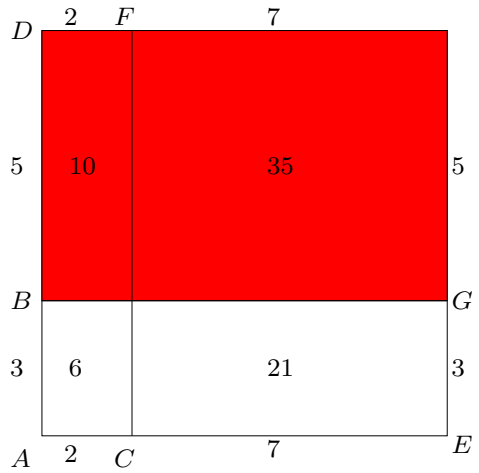
$$3 \times 2 = (8 - 5) \times (9 - 7)$$



Regola dei segni in *aritmetica*

Rafael BOMBELLI (?-1572?), Simon STEVIN

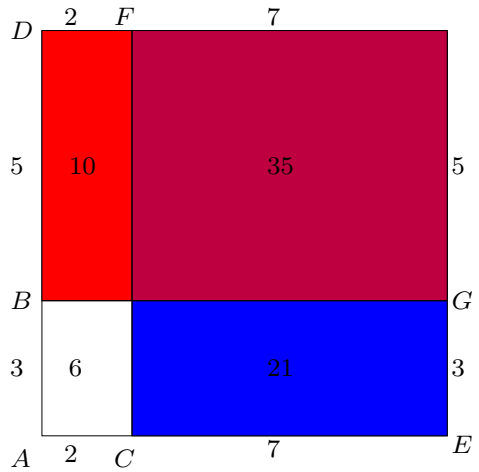
$$3 \times 2 = (8-5) \times (9-7)$$



Regola dei segni in *aritmetica*

Rafael BOMBELLI (?-1572?), Simon STEVIN

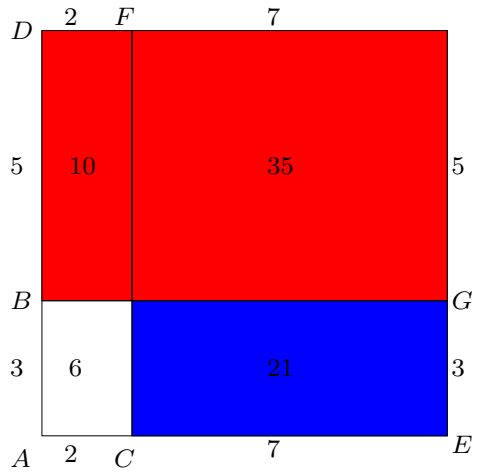
$$3 \times 2 = (8 - 5) \times (9 - 7)$$



Regola dei segni in *aritmetica*

Rafael BOMBELLI (?-1572?), Simon STEVIN

$$3 \times 2 = (8-5) \times (9-7)$$



Regola dei segni in *aritmetica*

DIOFANTO 250 d.C.

François VIÈTE (1540-1603)

$a > b$ e $c > d$

$$a(c-d) = ac - ad \qquad (a-b)c = ac - bc \qquad (a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

Una tentazione *irresistibile*

$$a(c-d) = ac - ad$$

Se $c = 0$, allora

$$a(-d) = -ad$$

$$(a-b)c = ac - bc$$

Se $a = 0$, allora

$$(-b)c = -bc$$

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

Se $a = c = 0$, allora

$$(-b)(-d) = +bd$$

Due osservazioni

La "*deduzione*" della regola dei segni soffre di un grave inconveniente: per ottenerla abbiamo violato le *regole del gioco*

Il segno $-$ acquista *due* significati differenti:

1. È simbolo di una operazione

2. Indica una quantità negativa

Giustificazioni della regola dei segni

Maria Gaetana AGNESI (1718-1799)

Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana (1748)

Moltiplicazione definita a partire dalle *proporzioni*

La moltiplicazione altro non è, che una proporzione geometrica, di cui il primo termine sia l'unità; il secondo, e il terzo termine le due quantità, che devonsi moltiplicare; ed il quarto il prodotto.

$$1 : a = b : ab$$

Osservazioni

- Non è una osservazione nuova, la si trova già nel matematico bolognese Pietro MENGOLI (1659).
- La permutabilità dei medi, consente di dedurre la proprietà commutativa del prodotto

Giustificazioni della regola dei segni: M.G. AGNESI

poiché il quarto [termine], per la natura della proporzione geometrica, deve essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo; se il secondo, e terzo termine sono positivi, cioè se, per esempio, è $1, a = b$*, al quarto, essendo l'unità, cioè il primo, positivo, dovrà pure essere positivo il quarto. Sia negativo il secondo, e positivo il terzo, cioè sia* $1, -a = b$*, al quarto; dovendo il quarto essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo, ed essendo negativo il secondo, dovrà pure il quarto essere negativo. Sia positivo il secondo, negativo il terzo, cioè sia* $1, a = -b$*, al quarto; dovendo il quarto essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo, ed essendo il secondo, ed il primo positivi, ed il terzo negativo, non potrà il quarto essere se non negativo. Sieno finalmente il secondo, ed il terzo negativi, cioè sia* $1, -a = -b$*, al quarto; essendo il secondo moltiplo negativo del primo, bisognerà che il quarto sia moltiplo negativo del terzo; ma il terzo è negativo, e dunque dovrà il quarto essere positivo.*

Giustificazioni della regola dei segni: M.G. AGNESI

Osservazione: le proprietà delle proporzioni valgono *solo* se i numeri che vi entrano sono *positivi*

D'Alembert—nel 1761—si servì della proporzione

$$1 : -1 = -1 : 1$$

per negare l'idea che i numeri negativi fossero minori di 0

Mi sia dunque permesso di sottolineare come sia falsa l'idea che talvolta viene presentata a proposito delle quantità negative, dicendo che esse sono sotto lo 0. Prescindendo dall'oscurità di questa idea intesa metafisicamente, coloro i quali la vorranno refutare grazie al calcolo, potranno accontentarsi di questa proporzione $1 : -1 = -1 : 1$*; proporzione reale perché il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi e che dunque* $\frac{1}{-1} = -1$ *e* $\frac{-1}{1} = -1$*. Tuttavia se si pensasse alle quantità negative come al di sotto dello zero,* 1 *sarebbe* > -1*, &* $-1 < 1$*; così non potrebbe sussistere la proporzione.*

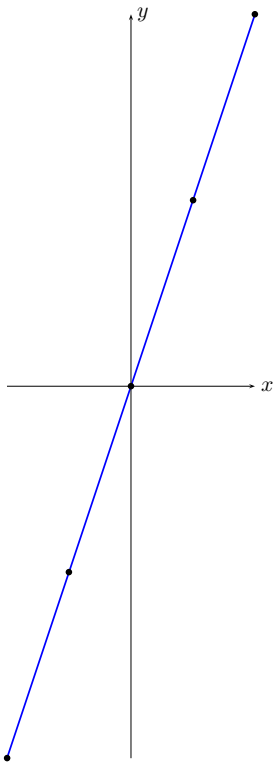
Giustificazioni della regola dei segni

Vincenzo RICCATI (1718-1799) e Gerolamo SALADINI (1731-1813)

Institutiones Analyticae (1765)

Siccome il moltiplicatore altro non mostra che il numero di volte in cui bisogna prendere la quantità da moltiplicare, se entrambi sono positivi, lo sarà evidentemente anche il prodotto e lo sarà tanto di più quanto più grande è il moltiplicatore, e tanto meno quanto minore è il moltiplicatore; pertanto, se il moltiplicatore è zero, lo sarà anche il prodotto. Quindi se il moltiplicatore decresce di più, al punto da diventare negativo, cioè minore di zero, occorre che anche il prodotto decresca di più e diventi dunque minore di zero, cioè negativo. Ecco dunque in che modo è evidente che il prodotto di una quantità positiva per una negativa sia negativo.

Giustificazioni della regola dei segni (RICCATI e SALADINI)



$y = 3x$

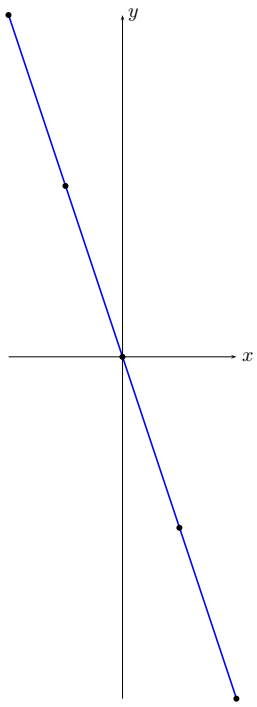
Giustificazioni della regola dei segni

Vincenzo RICCATI (1718-1799) e Gerolamo SALADINI (1731-1813)

Institutiones Analyticae (1765)

Supponiamo ora che occorra moltiplicare una quantità negativa per una positiva. Da quanto dimostrato, il prodotto sarà negativo e lo sarà tanto di meno in quest'ordine, cioè tanto più minore di 0 quanto più cresce il moltiplicatore, o diventa maggiore, e quanto più piccolo sarà il moltiplicatore, tanto più il prodotto sarà minore nell'ordine delle quantità negative, cioè più vicino allo zero; cosicché il prodotto cresce sempre se il moltiplicatore decresce: pertanto, quando quest'ultimo è zero, il prodotto sarà zero: pertanto se il moltiplicatore diminuisce ancora, cioè se diventa negativo, il prodotto crescerà di più e quindi diverrà maggiore di zero, e di conseguenza positivo; pertanto una quantità negativa, moltiplicata per una quantità negativa darà un prodotto positivo.

Giustificazioni della regola dei segni (RICCATI e SALADINI)



$y = -3x$

La critica di Lazare CARNOT (1753-1823)

Géométrie de position (1803)

Sia, si dice A una quantità; sottraiamo da essa una quantità minore a: la differenza $A - a$ sarà minore di A. Se supponiamo ora che a aumenti, $A - a$ diminuirà sempre più, diverrà 0 quando a diventa uguale ad A; poi, aggiungono, se a continua a crescere, $A - a$ diverrà minore di 0.

Per dimostrare che questo ragionamento è vizioso, basta far vedere che lo si potrebbe applicare allo stesso modo ad $\sqrt{A - a}$. In effetti, assegnato A, $\sqrt{A - a}$ diminuisce gradualmente al crescere di a; dunque dovrebbe diventare minore di 0, cioè a dire, semplicemente negativo e non immaginario, allorquando a diventi maggiore di A. Ciò che è falso.

Giustificazioni della regola dei segni (Nicholas SAUNDERSON 1682-1739)

The Elements of Algebra (1790, opera postuma)

Utilizzo di *progressioni aritmetiche*

Dei numeri $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ formano una progressione aritmetica se

$$a_n - a_{n-1} = d$$

dove d è una costante detta ragione della progressione

Esempi

La successione $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,...,$a_n = n$ ha ragione $d = 1$

La successione $a_1 = 2$, $a_2 = 4$,...,$a_n = 2n$ ha ragione $d = 2$

Principî:

1) Una progressione aritmetica è *completamente* individuata noti due suoi termini *consecutivi*

2) Moltiplicando i termini di una progressione aritmetica per una stessa quantità si ottiene un'altra progressione aritmetica

Giustificazioni della regola dei segni (N. SAUNDERSON)

Qual è il risultato di 4×-3?

- $3,\ 0,\ -3$: progressione aritmetica
- $12,\ 0,\ 4 \times -3$: progressione aritmetica
- $12,\ 0,\ -12$: *deve* coincidere con la precedente

Quindi $4 \times -3 = -12$

Giustificazioni della regola dei segni (N. SAUNDERSON)

Qual è il risultato di -4×-3?

- $3,\ 0,\ -3$: progressione aritmetica
- $-12,\ 0,\ -4 \times -3$: progressione aritmetica
- $-12,\ 0,\ 12$: *deve* coincidere con la precedente

Quindi $-4 \times -3 = 12$

quest'ultimo caso [$- \times - = +$] , così difficile per i giovani principianti, non sembra alla fine essere altro che un principio diffuso in Grammatica, cioè, che due negazioni fanno un'affermazione; la qual cosa è senza dubbio vera, benché forse non la si osservi sempre nelle lingue.

il principio che, moltiplicando i termini di una progressione aritmetica per un numero si ottiene un'altra progressione aritmetica è accettabile se i termini della progressione ed il fattore comune sono tutti positivi o, al più, se un termine è nullo. SAUNDERSON *estese* gratuitamente questa proprietà anche per numeri negativi.

Modelli di sistemi numerici: pregi e difetti

Modello economico

numeri positivi $\equiv$ *crediti*

numeri positivi $\equiv$ *debiti*

Inconvenienti: difficoltà a spiegare la regola dei segni

Leonhard EULER (1707-1783)

Vollstandige Anleitung zur Algebra (1771)

Cominciamo a moltiplicare $-a$ per 3; siccome $-a$ può considerarsi come un debito, è chiaro che, se lo si prende 3 volte, esso dovrà diventare un debito 3 volte più grande e dunque il prodotto richiesto è $-3a$

Similmente, se si tratta di moltiplicare $-a$ per b, si otterrà $-ba$ o, ciò che è lo stesso, $-ab$. Concludiamo da ciò, che, moltiplicando una quantità positiva per una quantità negativa, il prodotto sarà negativo; prendiamo perciò come regola che $+$ per $+$ fa $+$ o più e che, al contrario, $+$ per $-$, o $-$ per $+$ faccia $-$ o meno.

Resta ancora da risolvere il caso in cui $-$ sia moltiplicato per $-$ o, per esempio, $-a$ per $-b$. È anzitutto evidente che, quanto alla parte letterale, il prodotto sarà ab; è però ancora incerto se davanti a questo prodotto occorra mettere il segno $+$ o il segno $-$; sappiamo solo che ci vorrà uno o l'altro di questi segni. Ora, io dico che non può essere il segno $-$: perché $-a$ per $+b$ dà $-ab$, e $-a$ per $-b$ non può produrre lo stesso risultato di $-a$ per b; deve però risultarne l'opposto, cioè $+ab$; come conseguenza abbiamo questa regola: $-$ moltiplicato per $-$ fa più, come $+$ moltiplicato per $+$.

La reazione di STENDHAL

Come è possibile che moltiplicando 1000 franchi di debito per 500 franchi di debito, uno arrivi a possedere una fortuna di 5000000, cinque milioni?

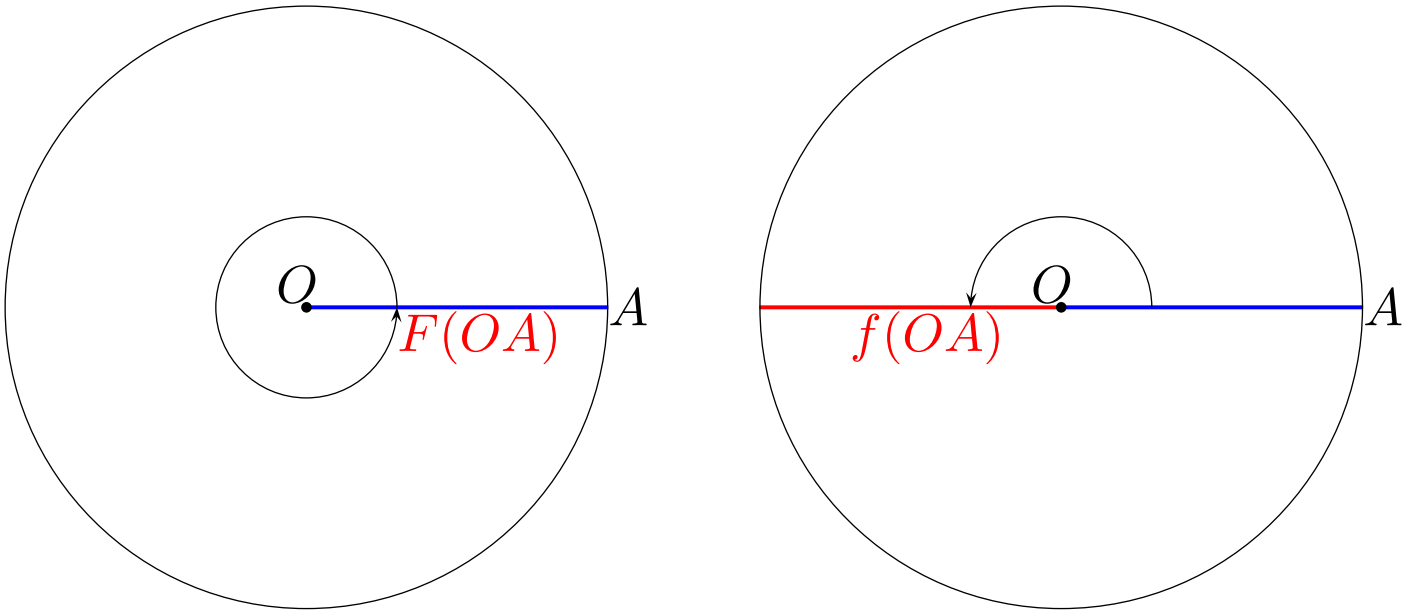
(Vie de Henry Brulard, 1835-36)

Un modello più fedele: rotazioni nel piano

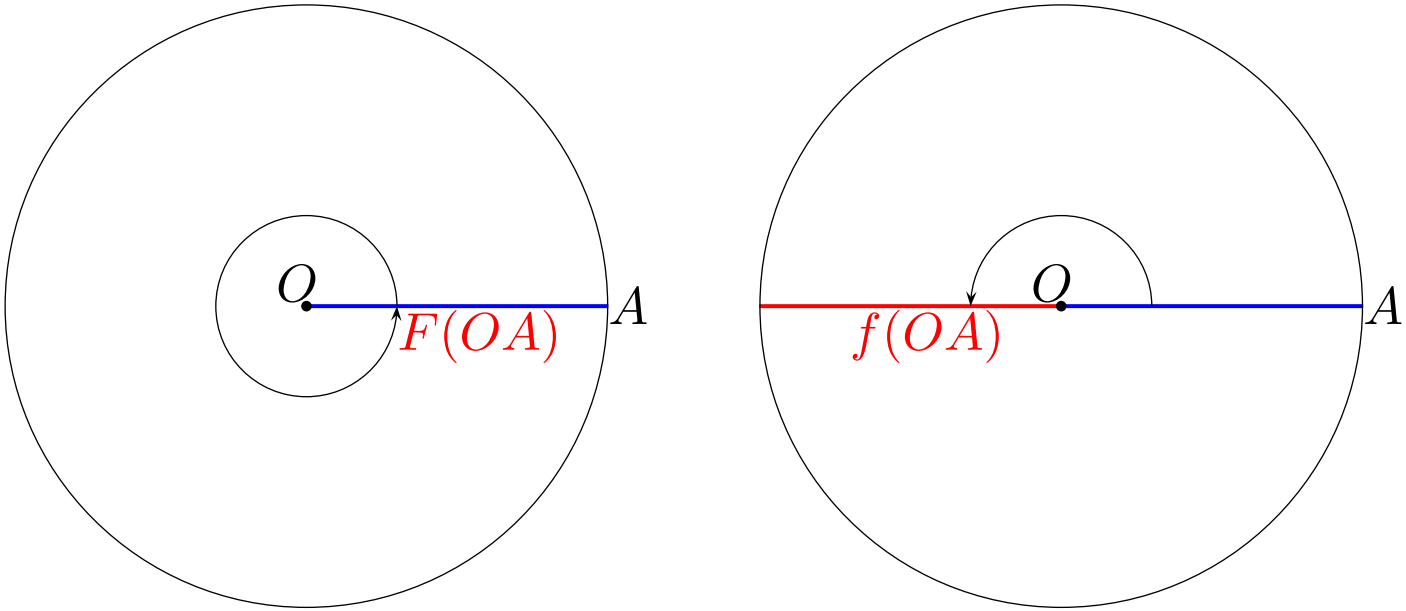
Duncan Farquharson GREGORY (1813-1844)

On the real nature of symbolical algebra (1838)

- Facciamo corrispondere ad un numero *positivo* un segmento OA.
- Sia F una rotazione antioraria di OA attorno ad O di $360°$
- Sia f una rotazione antioraria di OA attorno ad O di $180°$



Un modello più fedele: rotazioni nel piano



$F(F(OA)) = OA$ $\quad F(f(OA)) = f(OA)$ $\quad f(F(OA)) = f(OA)$ $\quad f(f(OA)) = OA$

F: moltiplicazione per $+1$

f: moltiplicazione per -1

Il modello geometrico ha regole *equivalenti* alla regola dei segni

Il principio di permanenza delle proprietà formali

George PEACOCK (1791-1858): A Treatise on Algebra (1830)

L'algebra è sempre stata considerata come una semplice modifica dell'aritmetica, sorta dall'uso del linguaggio simbolico e le operazioni di una scienza sono sempre state trasferite all'altra senza un cenno all'estensione del loro significato e applicazione: (...) le operazioni di addizione e sottrazione, prese nel loro semplice significato aritmetico, si suppongono indicate dai segni $+$ e $-$ (...) ma mentre l'impiego di questi segni ed operazioni è attentamente circoscritto quanto all'estensione del loro significato, non vi è una simile limitazione sull'estensione della loro applicazione così non si ritiene necessario (...) che le quantità sottratte debbano essere inferiori a quelle da cui sono sottratte: e quando la violazione di questa restrizione (...) ha portato ad un'esistenza indipendente dei segni $+$ e $-$ (...) abbiamo anche abbandonato le definizioni di queste operazioni nella pratica, benché ne abbiamo conservato il nome. (...) Può essere opportuno mostrare in dettaglio i passaggi successivi che sono fatti dai principii ed operazioni dell'aritmetica a quelli dell'algebra, per dimostrare che la loro connessione non è necessaria ma convenzionale e che l'aritmetica può solo essere considerata come una Scienza dell'ispirazione, alla quale i principii e le operazioni dell'algebra sono adattati ma mai determinati o limitati da essi.

Una convenzione convincente

Convenzione non è *arbitrio*.

Hermann HANKEL (1839-1873): principio di permanenza delle proprietà formali

operazioni: legami, diretti od inversi, tra oggetti astratti che godono di certe proprietà *dichiarate esplicitamente*:

addizione, moltiplicazione: proprietà *associativa* e *distributiva*.

$(a - b)$ (a e b: *oggetti*): è l'oggetto che, sommato a b restituisce a

$$(a - b) + b = a$$

zero: *modulo* della somma, $a + 0 = a$

$-a$: risultato dell'operazione $0 - a$.

principio di permanenza delle proprietà formali

Hankel *deduce* la regola dei segni dalla proprietà *distributiva*

$$(a+b)c = ac + bc$$

Poniamo $b = -a$ e allora $ac + (-a)c = 0$

$$(-a)c = -ac.$$

$$a(c+d) = ac + ad$$

Poniamo $d = -c$

$$a(-c) = -ac$$

Sostituito c con $-c$

$$(-a)(-c) = ac$$

Numeri negativi come coppie di numeri naturali

Otto STOLZ (1842-1905), Jules TANNERY (1848-1910)

Siano a e b due numeri naturali

coppia (a, b): insieme *ordinato* dei numeri *naturali* a e b

Definizione: $(a, b) = (a', b')$ se

$$a + b' = a' + b$$

Esempi: $(5, 3) = (4, 2)$

$$(n, n) = (1, 1) = (0, 0)$$

Definizione:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

Conseguenze

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

La coppia $(0, 0)$ gioca il ruolo di *elemento neutro*: (b, a) è il simmetrico di (a, b)

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, a + b) = (0, 0)$$

Prodotto di una coppia (a, b) per un numero naturale n: è la somma di n coppie uguali ad (a, b)

$$n \times (a, b) = (na, nb)$$

Definizione

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' + bb', ab' + ba')$$

Esempi: $(3, 4) \times (2, 5) = (26, 23)$ $\quad (a, b) \times (1, 0) = (a, b)$ $\quad (a, b) \times (0, 0) = (0, 0)$

Teorema: Aggiungendo o sottraendo lo stesso numero da ambo i termini di una coppia, la coppia non varia

$$(a, b) = (a + n, b + n)$$

Conseguenza: Se

$$a > b \qquad (a, b) = (a - b, 0)$$

Se

$$a < b \qquad (a, b) = (0, b - a)$$

Se

$$a = b \qquad (a, b) = (0, 0)$$

numeri positivi: quelli del tipo $(a,0) \equiv (a)_p$, a valore assoluto di $(a)_p$.

numeri negativi: quelli del tipo $(0,b) \equiv (b)_n$, b valore assoluto di $(b)_n$.

numero neutro: $(0,0)$.

Somma $(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b')$

$$\begin{cases} (a,0)+(a',0) = (a+a',0) & [(a)_p + (a')_p = (a+a')_p] \\ (0,b)+(0,b') = (0,b+b') & [(b)_n + (b')_n = (b+b')_n] \\ (a,0)+(0,b') = (a,b') & \end{cases}$$

$$(a,0)+(0,b') = (a,b') = \begin{cases} (a-b',0) & \text{se} \quad a > b' \\ (0,b'-a) & \text{se} \quad a < b' \end{cases}$$

Prodotto $(a,b) \times (a',b') = (aa' + bb', ab' + ba')$

$$\begin{cases} (a,0) \times (a',0) = (aa',0) & [(a)_p \times (a')_p = (aa')_p] \\ (a,0) \times (0,b') = (0,ab') & [(a)_p \times (b')_n = (ab')_n] \\ (0,b) \times (a',0) = (0,ba') & [(b)_n \times (a')_n = (ba')_n] \\ (0,b) \times (0,b') = (bb',0) & [(b)_n \times (b')_n = (bb')_p] \end{cases}$$

Regola dei segni!