Costruzione delle direzioni coniugate

Daniele Boffi

In questa nota riporto una dimostrazione alternativa relativa alla costruzione delle direzioni di discesa nel metodo del gradiente coniugato.

Premessa: supponiamo di aver seguito tutti i ragionamenti svolti dal libro di testo fino alla formula (4.43) a pagina 139 (quella che a lezione è stata chiamata *Osservazione 1*).

Dobbiamo costruire $\mathbf{p}^{(k+1)}$ in modo che sia coniugato a tutte le direzioni di discesa precedenti. Scegliamo pertanto $\mathbf{p}^{(k+1)}$ come combinazione lineare di $\mathbf{r}^{(k+1)}$ e delle direzioni di discesa precedenti:

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \sum_{j=0}^{k} \beta_{kj}\mathbf{p}^{(j)}. \tag{1}$$

Vogliamo verificare che grazie a proprietà già dimostrate si ha:

$$\beta_{kj} = 0 \quad \forall j \le k-1,$$

cioè **è sufficiente richiedere il coniugio tra le ultime due direzioni di discesa** per avere che $\mathbf{p}^{(k+1)}$ sia **coniugato anche a tutte le direzioni precedenti**. Da (1), calcolando il coniugio rispetto a $\mathbf{p}^{(i)}$ ($i \le k$), si ottiene

$$0 = {\mathbf{p}^{(k+1)}}^\top A\mathbf{p}^{(i)} = {\mathbf{r}^{(k+1)}}^\top A\mathbf{p}^{(i)} + \sum_{j=0}^{k} \beta_{kj}{\mathbf{p}^{(j)}}^\top A\mathbf{p}^{(i)};$$

ricavando $A\mathbf{p}^{(i)}$ dalla relazione $\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} - \alpha_i A\mathbf{p}^{(i)}$ e sostituendo nella precedente si ottiene

$$0 = -{\mathbf{r}^{(k+1)}}^\top A\frac{\mathbf{r}^{(i+1)} - \mathbf{r}^{(i)}}{\alpha_i} + \sum_{j=0}^{k} \beta_{kj}{\mathbf{p}^{(j)}}^\top A\mathbf{p}^{(i)}. \tag{2}$$

Osserviamo ora che, grazie a (1), $\mathbf{r}^{(i)} \in \operatorname{span}\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}^{(i)}\}$ e di conseguenza per (4.43) si ha ${\mathbf{r}^{(k+1)}}^\top \mathbf{r}^{(i)} = 0$ ($i \le k$). Ne deriva (v. anche (4.41)) che per $i \le k-1$ la (2) si riduce a

$$\beta_{ki}{\mathbf{p}^{(i)}}^\top A\mathbf{p}^{(i)} = 0$$

che implica il risultato richiesto: $\beta_{ki} = 0$.

A questo punto la formula (1) assume la forma che si trova nel libro nell'equazione (4.44) a pagina 139 e il relativo valore di $\beta_k = \beta_{kk}$ è quello dato dalla formula (4.45).