DIMOSTRAZIONE. Si utilizza un procedimento per ricorrenza. Sappiamo che (5.46), (5.47) e (5.49) sono vere per $k = 1$; inoltre, poiché:

$$p_0 = r_0,\ p_1 = r_1 + \beta_1 p_0 \ \Rightarrow\ r_1 = p_1 - \beta_1 p_0$$

si ha:

$$\mathrm{span}(r_0, r_1) = \mathrm{span}(p_0, p_1)$$

Allo stesso modo, da:

$$r_1 = r_0 - \alpha_0 A p_0 \ \Rightarrow\ A p_0 = \frac{r_0 - r_1}{\alpha_0}$$

si ha:

$$\mathrm{span}(p_0, Ap_0) = \mathrm{span}(r_0, Ar_0) = \mathrm{span}(r_0, r_1)$$

e quindi (5.49) (5.50) sono verificate per $k = 1$.

Supponendo ora le relazioni precedenti vere per k, dimostriamo che lo sono anche per $k + 1$.

Siccome $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$, si ha per $i \leq k - 1$:

$$(r_{k+1}, p_i) = (r_k, p_i) - \alpha_k (A p_k, p_i) = 0$$

grazie all'ipotesi di ricorrenza. D'altra parte, per $i = k$ si è già dimostrato che $(r_{k+1}, p_k) = 0$; quindi (5.46) è dimostrata.

Da (5.49) si ha: $r_k \in \mathrm{span}(r_0, Ar_0, \ldots, A^k r_0)$ e da (5.50):

$$\begin{aligned} Ap_k \in A\,\mathrm{span}(r_0, Ar_0, \ldots, A^k r_0) &= \mathrm{span}(Ar_0, A^2 r_0, \ldots, A^{k+1} r_0) \\ &\subset \mathrm{span}(r_0, Ar_0, \ldots, A^{k+1} r_0) \end{aligned}$$

Poiché $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$, si ha pertanto $r_{k+1} \in \mathrm{span}(r_0, Ar_0, \ldots, A^{k+1} r_0)$ e quindi: $\mathrm{span}(r_0, r_1, \ldots, r_{k+1}) \subset \mathrm{span}(r_0, Ar_0, \ldots, A^{k+1} r_0)$.

Da quanto ora visto si ha che r_{k+1} è una combinazione lineare di $A^i r_0$, per $0 \leq i \leq k + 1$, cioè:

$$r_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} c_i A^i r_0 = \sum_{i=0}^{k} c_i A^i r_0 + c_{k+1} A^{k+1} r_0$$

Osserviamo ora che:

$$r_{k+1} \notin \mathrm{span}(r_0, Ar_0, \ldots, A^k r_0) = \mathrm{span}(p_0, p_1, \ldots, p_k)$$