Esempi di risoluzione del laplaciano 1D in forma mista

L'obiettivo di questa esercitazione è di implementare alcuni schemi di elementi finiti per l'approssimazione del laplaciano in forma mista. Per semplicità ci limiteremo al caso monodimensionale.

Ricordiamo la formulazione variazionale nel caso multidimensionale.

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^n$; data $f \in L^2(\Omega)$ si cercano $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ e $u \in L^2(\Omega)$ tali che

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}, u) = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega) \\ (\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}, v) = -(f, v) & \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Nel caso monodimensionale l'operatore di divergenza diventa la derivata prima (il laplaciano è la derivata seconda, cioè la derivata della derivata) e lo spazio $H(\mathrm{div};\Omega)$ diventa $H^1(\Omega)$. Si ha quindi la seguente formulazione. Sia $I = (a, b)$ un intervallo reale; data $f \in L^2(I)$ si cercano $s \in H^1(I)$ e $u \in L^2(I)$ tali che

$$\begin{cases} (s, t) + (t', u) = 0 & \forall t \in H^1(I) \\ (s', v) = -(f, v) & \forall v \in L^2(I). \end{cases}$$

L'approssimazione mediante elementi finiti si ottiene quindi scegliendo una coppia di spazi discreti che approssimino, rispettivamente, $H^1(I)$ e $L^2(I)$. Un'approssimazione conforme di $H^1(I)$ richiede necessariamente elementi finiti *continui*, mentre per l'approssimazione di $L^2(I)$ si possono usare indifferentemente elementi *continui* o *discontinui*.

L'esercizio richiede di analizzare l'efficacia e le convergenza dei seguenti tre metodi: **P1-P1(continuo), P1-P0, P2-P0**.

Scelta dei parametri. Per iniziare, si scelga l'intervallo $(0, 1)$, il termine noto $f(x) \equiv 1$ in modo tale che la soluzione esatta sia $s(x) = 1/2 - x$ e $u(x) = x(1-x)/2$.

Le matrici da implementare sono due:

- A: la matrice associata al prodotto scalare (s, t) (è una matrice quadrata la cui dimensione è data dallo spazio che approssima le s);
- B: la matrice associata alla forma (s', v) (è una matrice rettangolare con un numero di righe pari alla dimensione dello spazio che approssima u e di colonne pari alla dimensione dello spazio che approssima s).

Occorre inoltre il vettore F del termine noto dato dalla forma (f, v).

Il tutto va assemblato in modo da ottenere il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}.$$

Osservazione importante. Dal momento che siamo in 1D, supponendo di fare una suddivisione uniforme dell'intervallo I, può essere molto comodo fare i conti a mano (cioè senza bisogno di effettuare trasformazioni dall'elemento di riferimento) integrando direttamente le funzioni di base e le loro derivate in intervalli del tipo $(0, h)$.