Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011

Analisi Numerica
Istruzioni per l'esame

Modalità dell'esame

L'esame consiste in un colloquio orale. Lo studente deve presentare prima del colloquio una breve relazione su un argomento svolto in laboratorio (Matlab).

È richiesta la conoscenza degli enunciati principali di tutti gli argomenti presenti nel programma. Lo studente sceglie inoltre **almeno dieci argomenti** per i quali approfondisce maggiormente tutti i dettagli (**dimostrazioni**). L'esame valuterà in particolare la capacità dello studente nel classificare i problemi e nell'individuare gli algoritmi numerici idonei alla loro risoluzione.

Programma del corso

1. Analisi degli errori. Classificazione dei problemi computazionali. Sistema dei numeri floating point. Aritmetica in virgola mobile. Propagazione degli errori. Condizionamento di un problema.

2. Metodi diretti per la risoluzione dei sistemi lineari. Sistemi triangolari. Metodo di eliminazione di Gauss. Fattorizzazione LU. Strategie di pivoting. Altre fattorizzazioni, fattorizzazione di Choleski. Matrici a banda, a blocchi e sparse. Il numero di condizionamento. Analisi a priori in avanti e all'indietro. Stabilità della fattorizzazione LU. Sistemi sovradeterminati; fattorizzazione QR; algoritmo di Gram–Schmidt modificato e matrici di Householder.

3. Metodi iterativi per la risoluzione dei sistemi lineari. Metodi di splitting: metodo di Jacobi, metodo di Gauss-Seidel. Matrice di iterazione e raggio spettrale. Metodi JOR e SOR. Studio delle convergenza e criteri di arresto. Metodi di tipo Richardson; analisi del metodo di Richardson stazionario. Metodo del gradiente (steepest descent). Metodo del gradiente coniugato; metodo del gradiente coniugato precondizionato. Precondizionatori.

4. Calcolo di autovalori e autovettori. Condizionamento dei problemi agli autovalori e localizzazione degli autovalori. Metodo delle potenze. Metodo delle potenze inverse. Tecnica di shift. Deflazione. Metodi di similitudine; il metodo QR.

5. Approssimazione di funzioni e di dati. Interpolazione di Lagrange. Analisi dell'errore nell'intepolazione polinomiale; costante di Lebesgue e stima dell'errore. Fenomeno di Runge e nodi di Chebychev. Metodo di Newton e differenze divise. Analisi di stabilita' dell'interpolazione. Interpolazione astratta: unisolvenza. Spline: lineari e del terz'ordine. Interpolazione polinomiale a tratti in più dimensioni. Il problema generale dell'approssimazione lineare. Minimi quadrati lineari. Polinomi ortogonali (Legendre, Chebyshev). Miglior approssimazione.

6. Equazioni non lineari e ottimizzazione. Metodo di bisezione. Metodo Regula Falsi e Illinois. Metodo di Newton. Analisi del metodo di Newton. Metodo delle corde. Metodo delle secanti. Iterazioni di punto fisso. Convergenza del metodo di punto fisso e propagazione degli errori. Il metodo di Newton come iterazione di punto fisso: radici multiple. Metodo di deflazione per la ricerca delle radici di polinomi.

7. Integrazione numerica. Formula del punto medio semplice e composita. Formule di Newton-Cotes (trapezi e Cavalieri–Simpson). Stima dell'errore nelle formule di Newton-Cotes. Formule composite. Formule di Gauss, teorema di Jacobi. Formule di Gauss–Legendre, Gauss–Chebyshev, Gauss–Lobatto. Formula di Cavalieri–Simpson adattiva.

8. Approssimazione di equazioni differenziali. Metodo di Eulero esplicito. Analisi del metodo di Eulero esplicito. Adattività e propagazione degli errori per il metodo di Eulero esplicito. Metodi di sviluppo in serie. Metodi Runge–Kutta. Eulero implicito, ϑ-metodo, Crank–Nicolson. Analisi dei metodi a un passo (consistenza e 0-stabilità). Assoluta stabilità (Eulero esplicito, Eulero implicito, ϑ-metodo). Metodi multistep lineari. Metodi BDF. Metodi di Adams. Cenni su metodi predictor-corrector. Consistenza dei metodi multistep. Condizione delle radici e 0-stabilità.

Totale argomenti con dimostrazioni: **almeno dieci** a scelta dello studente.