CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 novembre 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini l'espressione generale per $L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

   (b) Si determini $\dim \operatorname{Ker} L_A =$ $\dim \operatorname{Im} L_A =$

   (c) Si determini quali tra i seguenti vettori appartengono ad $\operatorname{Im} L_A$:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (d) Si determini per quale valore/i di h il vettore parametrico $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1+h^2 \\ 3h \\ -h^2 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Ker} L_A$:

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro h

$$\begin{cases} x + y + t = 1 \\ x + (1+h)y + hz + t = 2h + 1 \\ hx - hz + h^2 t = 0\,. \end{cases}$$

   (a) Si determini per quale valore di h il sistema è risolubile:

   (b) Si determini per quali valori di h l'insieme delle soluzioni ha dimensione > 1

   (c) Si risolva esplicitamente il sistema per $h = -1$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
   (a) Si determini $p_A(\lambda)$, polinomio caratteristico di A:
   (b) Si determinino gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:
   (c) Si determini una base di ciascun autospazio:
   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano π di equazione $x + 2y - z = 1$ ed il punto $A = (1, -2, 1)$. Determinare:
   (a) Una rappresentazione parametrica di π:
   (b) Una giacitura di π:
   (c) Una rappresentazione cartesiana della retta passante per A e perpendicolare a π:
   (d) L'intersezione B del piano π con l'asse $Oz = \mathrm{span}(\hat{\boldsymbol{k}})$:
   (e) La distanza di $d(A, B)$ di A dall'intersezione calcolata al punto precedente.

---

5. Sia $V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^4$.
   (a) Si determini (motivando la risposta) $\dim V^\perp =$
   (b) Si determini una base di $V^\perp$:
   (c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ su V:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 novembre 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dipendente da parametro:

$$V = \operatorname{span}\left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -h \\ 3h \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ h^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h^2 \\ 3h \end{pmatrix} \right)$$

1. Si determini la dimensione di V al variare del parametro h:

2. Si determini per quale valore del parametro il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ appartiene a V:

3. Si determini per quali valori di h il sottospazio $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ é in somma diretta con V:

4. Si determini per quali valori di h il sottospazio $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ è un complementare di V in $\mathbb{R}^4$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 novembre 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini l'espressione generale per $L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} =$

   (b) Si determini $\dim \operatorname{Ker} L_A =$ $\dim \operatorname{Im} L_A =$

   (c) Si determini quali tra i seguenti vettori appartengono a $\operatorname{Ker} L_A$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (d) Si determini per quale valore/i di h il vettore parametrico $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1-h^2 \\ 3h \\ 1+h^2 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L_A$:

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro h

$$\begin{cases} y + z + t = 1 \\ hx - hz + h^2 t = h - 1 \\ hx + (h-1)y - z - t = 4h\,. \end{cases}$$

   (a) Si determini per quale valore di h il sistema è risolubile:

   (b) Si determini per quali valori di h l'insieme delle soluzioni ha dimensione > 1

   (c) Si risolva esplicitamente il sistema per $h = 1$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4, in funzione del parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & -11 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini $p_A(\lambda)$, polinomio caratteristico di A:

   (b) Si determinino gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (c) Si determini una base di ciascun autospazio:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano π di equazione $x + y - 2z = -1$ ed il punto $A = (1, -1, -2)$. Determinare:

   (a) Una rappresentazione parametrica di π:

   (b) Una giacitura di π:

   (c) Una rappresentazione cartesiana della retta passante per A e perpendicolare a π:

   (d) L'intersezione B del piano π con l'asse $Oy = \operatorname{span}(\hat{\boldsymbol{\jmath}})$:

   (e) La distanza di $d(A, B)$ di A dall'intersezione calcolata al punto precedente.

---

5. Sia $V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$.

   (a) Si determini (motivando la risposta) $\dim V^\perp =$

   (b) Si determini una base di $V^\perp$:

   (c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ su V:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 novembre 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dipendente da parametro:

$$V = \operatorname{span}\left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ -3h \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} h^2 \\ 1 \\ -3h \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

1. Si determini la dimensione di V al variare del parametro h:
2. Si determini per quale valore del parametro il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a V:
3. Si determini per quali valori di h il sottospazio $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ é in somma diretta con V:
4. Si determini per quali valori di h il sottospazio $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ è un complementare di V in $\mathbb{R}^4$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 novembre 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini l'espressione generale per $L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

(b) Si determini $\dim \operatorname{Ker} L_A =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L_A =$

(c) Si determini quali tra i seguenti vettori appartengono a $\operatorname{Im} L_A$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Si determini per quale valore/i di h il vettore parametrico $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1-2h^2 \\ -3h/2 \\ -h^2 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Ker} L_A$:

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro h

$$\begin{cases} 2hx - 2hy + 4h^2 t = 8h \\ x + 2hy + (1+2h)z + t = 1 - 2h \\ x + z + t = 1 \end{cases}$$

(a) Si determini per quale valore di h il sistema è risolubile:

(b) Si determini per quali valori di h l'insieme delle soluzioni ha dimensione > 1

(c) Si risolva esplicitamente il sistema per $h = -1/2$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4, in funzione del parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini $p_A(\lambda)$, polinomio caratteristico di A:

   (b) Si determinino gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (c) Si determini una base di ciascun autospazio:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano π di equazione $2x + y + z = 1$ ed il punto $A = (-2, 1, -1)$. Determinare:

   (a) Una rappresentazione parametrica di π:

   (b) Una giacitura di π:

   (c) Una rappresentazione cartesiana della retta passante per A e perpendicolare a π:

   (d) L'intersezione B del piano π con l'asse $Ox = \text{span}(\hat{\boldsymbol{\imath}})$:

   (e) La distanza di $d(A, B)$ di A dall'intersezione calcolata al punto precedente.

---

5. Sia $V = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$.

   (a) Si determini (motivando la risposta) $\dim V^\perp =$

   (b) Si determini una base di $V^\perp$:

   (c) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ su V:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 novembre 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dipendente da parametro:

$$V = \operatorname{span}\left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -h \\ 2 \\ 0 \\ 3h \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} h^2/2 \\ 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} h^2/2 \\ 2 \\ 0 \\ 3h \end{pmatrix} \right)$$

1. Si determini la dimensione di V al variare del parametro h:
2. Si determini per quale valore del parametro il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a V:
3. Si determini per quali valori di h il sottospazio $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ é in somma diretta con V:
4. Si determini per quali valori di h il sottospazio $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ è un complementare di V in $\mathbb{R}^4$: