CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} =$

   (b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Scrivere la matrice associata a L nelle basi **canoniche**:

   (d) Fornire una rappresentazione parametrica dell'insieme

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\}$$

---

2. Si consideri la seguente lista di vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro $h \in real$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\h^2-7\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\10-h^2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3-h\\h-3\end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare per quali valori di h tale lista è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix}3\\h\\9\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span} L$:

   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 6y + 9z + 4t = -1 \\ 3x + 6y + 3z - 4t = 9 \end{cases}$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1\colon x + z - 2 = 0$ e $\pi_2\colon 2x + y - z = 0$. Sia $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica per r:

   (b) Determinare la distanza di π_1 e π_2 dall'origine O del riferimento.

   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare al piano π_1:

   (d) Determinare le coordinate dei punti P appartenenti a r tali che
$$||OP|| = 2\sqrt{2}$$

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Stabilire quali fra i seguenti sono autovettori e calcolare i corrispondenti autovalori:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

   (c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

5. Si consideri la forma quadratica $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da:
$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz.$$

   (a) Determinare l'espresione in forma canonica $Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

   (b) Scrivere la matrice M che realizza il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare un vettore non nullo X tale che $Q(X) = 0$:

   (d) Stabilire il segno di Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta $V = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di π ($180°$) intorno all'asse V.

1. Determinare dimensione ed equazioni del sottospazio $V^\perp$.
2. Determinare una base ortogonale $\{X_1, X_2\}$ di $V^\perp$.
3. Calcolare le immagini $L(X_1)$ e $L(X_2)$.
4. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$

   (b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Im} L$:

   (c) Scrivere la matrice associata a L nella base **canonica**:

   (d) Fornire una rappresentazione parametrica dell'insieme

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

---

2. Si consideri la seguente lista di vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5-h^2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\h^2-1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4-2h\\2-h\end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare per quali valori di h tale lista è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix}3\\1-h\\6\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span} L$:

   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+3z=3 \\ x-4y+8z-2t=-2 \\ 2x+2y+6z-t=6 \end{cases}$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon x + z - 1 = 0$ e $\pi_2 \colon 2x + y - z = 0$. Sia $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica per r:

   (b) Determinare la distanza di π_1 e π_2 dall'origine O del riferimento.

   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare al piano π_1:

   (d) Determinare le coordinate dei punti P appartenenti a r tali che

$$||OP|| = \sqrt{2}$$

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Stabilire quali fra i seguenti sono autovettori e calcolare i corrispondenti autovalori:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

   (c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

5. Si consideri la forma quadratica $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da:

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2xy + 4xz + y^2 - 2yz.$$

   (a) Determinare l'espressione in forma canonica $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

   (b) Scrivere la matrice M che realizza il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare un vettore non nullo X tale che $Q(X) = 0$:

   (d) Stabilire il segno di Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta $V = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su V.

1. Determinare dimensione ed equazioni per il sottospazio $V^\perp$.
2. Determinare una base ortogonale $\{X_1, X_2\}$ di $V^\perp$.
3. Calcolare le immagini $L(X_1)$ e $L(X_2)$.
4. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2012
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} =$

   (b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Scrivere la matrice associata a L nelle basi **canoniche**:

   (d) Fornire una rappresentazione parametrica dell'insieme

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \right\}$$

---

2. Si consideri la seguente lista di vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\10-4h^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\4h^2-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2h-3\\3-2h\end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare per quali valori di h tale lista è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix}3\\9\\4h-3\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span} L$:

   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+2z = 3 \\ 3x+3y+6z-5t = 9 \\ x+6y-3z+5t = -7 \end{cases}$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon y + z - 2 = 0$ e $\pi_2 \colon 2y + x - z = 0$. Sia $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica per r:

   (b) Determinare la distanza di π_1 e π_2 dall'origine O del riferimento.

   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare al piano π_1:

   (d) Determinare le coordinate dei punti P appartenenti a r tali che
   $$||OP|| = 2\sqrt{2}$$

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Stabilire quali fra i seguenti sono autovettori e calcolare i corrispondenti autovalori:
   $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

   (c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

5. Si consideri la forma quadratica $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da:
   $$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz.$$

   (a) Determinare l'espressione in forma canonica $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

   (b) Scrivere la matrice M che realizza il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare un vettore non nullo X tale che $Q(X) = 0$:

   (d) Stabilire il segno di Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano $V = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su V.

1. Determinare dimensione ed equazioni di $V^\perp$.
2. Determinare una base ortogonale $\{X_1, X_2\}$ di V.
3. Calcolare le immagini $L(X_1)$ e $L(X_2)$.
4. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$:

   (b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Im} L$:

   (c) Scrivere la matrice associata a L nella base **canonica**:

   (d) Fornire una rappresentazione parametrica dell'insieme

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$$

---

2. Si consideri la seguente lista di vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\h^2-6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-h^2-2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2h-4\\h-2\end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare per quali valori di h tale lista è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix}2\\-4\\2-h\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span} L$:

   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ -2x-5y-3z-2t=-4 \\ 2x+2y+6z-t=1 \end{cases}$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon y + z - 1 = 0$ e $\pi_2 \colon x + 2y - z = 0$. Sia $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica per r:

   (b) Determinare la distanza di π_1 e π_2 dall'origine O del riferimento.

   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare al piano π_1:

   (d) Determinare le coordinate dei punti P appartenenti a r tali che
   $$||OP|| = \sqrt{2}$$

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Stabilire quali fra i seguenti sono autovettori e calcolare i corrispondenti autovalori:
   $$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

   (c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

5. Si consideri la forma quadratica $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da:
   $$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2xz.$$

   (a) Determinare l'espresione in forma canonica $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

   (b) Scrivere la matrice M che realizza il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare un vettore non nullo X tale che $Q(X) = 0$:

   (d) Stabilire il segno di Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano $V = \text{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simmetria ortogonale rispetto al piano V.

1. Determinare dimensione ed equazioni per il sottospazio $V^{\perp}$.
2. Determinare una base ortogonale $\{X_1, X_2\}$ di V.
3. Calcolare le immagini $L(X_1)$ e $L(X_2)$.
4. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} =$

   (b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Scrivere la matrice associata a L nelle basi **canoniche**:

   (d) Fornire una rappresentazione parametrica dell'insieme

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \right\}$$

---

2. Si consideri la seguente lista di vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro $h\mathbb{R}$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}6\\h^2-7\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\10-h^2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3-h\\h+3\\0\end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare per quali valori di h tale lista è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix}9\\-h\\3\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span} L$:

   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 6x + 3y + 3z - t = 9 \\ -3x + y + 6z + t = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon x + y - 2 = 0$ e $\pi_2 \colon 2x - y + z = 0$. Sia $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica per r:

   (b) Determinare la distanza di π_1 e π_2 dall'origine O del riferimento.

   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare al piano π_1:

   (d) Determinare le coordinate dei punti P appartenenti a r tali che
$$||OP|| = 2\sqrt{2}$$

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 3 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Stabilire quali fra i seguenti sono autovettori e calcolare i corrispondenti autovalori:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

   (c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

5. Si consideri la forma quadratica $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da:
$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz.$$

   (a) Determinare l'espresione in forma canonica $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

   (b) Scrivere la matrice M che realizza il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare un vettore non nullo X tale che $Q(X) = 0$:

   (d) Stabilire il segno di Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta $V = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di π ($180°$) intorno all'asse V.

1. Determinare dimensione ed equazioni del sottospazio $V^\perp$.
2. Determinare una base ortogonale $\{X_1, X_2\}$ di $V^\perp$.
3. Calcolare le immagini $L(X_1)$ e $L(X_2)$.
4. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$

   (b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Im} L$:

   (c) Scrivere la matrice associata a L nella base **canonica**:

   (d) Fornire una rappresentazione parametrica dell'insieme

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \,|\, L(X) = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

---

2. Si consideri la seguente lista di vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2-h^2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\h^2-10\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4-2h\\h-2\end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare per quali valori di h tale lista è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix}2\\-4\\6+h\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span} L$:

   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ -2x - 7y - z - 2t = -4 \\ 2x + 2y + 6z + t = 9 \end{cases}$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon x + y - 1 = 0$ e $\pi_2 \colon 2x - y - z = 0$. Sia $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica per r:

   (b) Determinare la distanza di π_1 e π_2 dall'origine O del riferimento.

   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare al piano π_1:

   (d) Determinare le coordinate dei punti P appartenenti a r tali che

$$||OP|| = \sqrt{2}$$

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   (a) Stabilire quali fra i seguenti sono autovettori e calcolare i corrispondenti autovalori:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

   (c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

5. Si consideri la forma quadratica $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da:

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2\sqrt{2}yz.$$

   (a) Determinare l'espressione in forma canonica $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

   (b) Scrivere la matrice M che realizza il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare un vettore non nullo X tale che $Q(X) = 0$:

   (d) Stabilire il segno di Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta $V = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su V.

1. Determinare dimensione ed equazioni per il sottospazio $V^\perp$.
2. Determinare una base ortogonale $\{X_1, X_2\}$ di $V^\perp$.
3. Calcolare le immagini $L(X_1)$ e $L(X_2)$.
4. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} =$

   (b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Scrivere la matrice associata a L nelle basi **canoniche**:

   (d) Fornire una rappresentazione parametrica dell'insieme

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \right\}$$

---

2. Si consideri la seguente lista di vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}10-4h^2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4h^2-7\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3+2h\\0\\-2h-3\end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare per quali valori di h tale lista è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix}-2h\\3\\6\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span} L$:

   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -6x + 9y + z + 7t = -4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + 4y + 2z - 7t = 6 \end{cases}$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon x + z - 2 = 0$ e $\pi_2 \colon x - y - 2z = 0$. Sia $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica per r:

   (b) Determinare la distanza di π_1 e π_2 dall'origine O del riferimento.

   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare al piano π_1:

   (d) Determinare le coordinate dei punti P appartenenti a r tali che
$$||OP|| = 2\sqrt{2}$$

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Stabilire quali fra i seguenti sono autovettori e calcolare i corrispondenti autovalori:
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

   (c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

5. Si consideri la forma quadratica $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da:
$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz.$$

   (a) Determinare l'espressione in forma canonica $Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

   (b) Scrivere la matrice M che realizza il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare un vettore non nullo X tale che $Q(X) = 0$:

   (d) Stabilire il segno di Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano $V = \text{Span}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su V.

1. Determinare dimensione ed equazioni di $V^\perp$.
2. Determinare una base ortogonale $\{X_1, X_2\}$ di V.
3. Calcolare le immagini $L(X_1)$ e $L(X_2)$.
4. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} =$

   (b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Im} L$:

   (c) Scrivere la matrice associata a L nella base **canonica**:

   (d) Fornire una rappresentazione parametrica dell'insieme

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid L(X) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

---

2. Si consideri la seguente lista di vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix}4h^2-1\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5-4h^2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4-4h\\0\\2-2h\end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Determinare per quali valori di h tale lista è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix}1-2h\\3\\6\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Span} L$:

   (c) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x+5y+z+4t=1 \\ 3x+y+z=3 \\ 6x+2y+2z+2t=6 \end{cases}$$

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon x + z - 1 = 0$ e $\pi_2 \colon x - y - 2z = 0$. Sia $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica per r:

   (b) Determinare la distanza di π_1 e π_2 dall'origine O del riferimento.

   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α contenente r e perpendicolare al piano π_1:

   (d) Determinare le coordinate dei punti P appartenenti a r tali che

$$||OP|| = \sqrt{2}$$

---

4. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Stabilire quali fra i seguenti sono autovettori e calcolare i corrispondenti autovalori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

   (c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

5. Si consideri la forma quadratica $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, data da:

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz.$$

   (a) Determinare l'espressione in forma canonica $Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

   (b) Scrivere la matrice M che realizza il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

   (c) Determinare un vettore non nullo X tale che $Q(X) = 0$:

   (d) Stabilire il segno di Q:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano $V = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simmetria ortogonale rispetto al piano V.

1. Determinare dimensione ed equazioni per il sottospazio $V^\perp$.
2. Determinare una base ortogonale $\{X_1, X_2\}$ di V.
3. Calcolare le immagini $L(X_1)$ e $L(X_2)$.
4. Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche.