CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U\colon \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$; $\dim V =$; $\dim(U + V) =$

   (b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per V ed una base per U:

   (c) Stabilire, motivando la risposta, se U e V sono sottospazi complementari in $\mathbb{R}^4$.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$:

   (e) Scrivere una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$:

---

2. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare esplicitamente $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

   (b) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (c) Stabilire se L è iniettiva, suriettiva motivando ogni affermazione.

   (d) Determinare una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

   (e) Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, descrivere $L(\operatorname{span}(\boldsymbol{w}))$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1-h & 0 \\ h & 1 & h-1 & 0 \\ 1-h^2 & h^2 & 1-2h^2 & h \\ 1 & 1 & 1-h & 1-h \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

   (b) Determinare per quali valori di h la matrice è invertibile:

   (c) Determinare per quali valori di h il sottospazio soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 0$, risolvere il sistema $AX = \mathbf{0}$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

   (b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

   (c) Se è possibile, determinare una matrice quadrata N tale che $N^{-1}A\,N$ è una matrice diagonale, giustificando la risposta.

   (d) Spiegare se è possibile trovare una matrice ortogonale N che soddisfi i requisiti del punto precedente, e perché.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 2, 0)$, $B = (0, -1, 1)$, e $Q = (3, 1, 1)$. Determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per O, A e B:

   (b) una rappresentazione parametrica della retta s per Q e diretta come AB:

   (c) la proiezione ortogonale di Q su π:

   (d) la distanza δ_1 fra π e Q, e la distanza δ_2 fra Q e la retta AB:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Siano $Y_1, \dots Y_n$ vettori di $\mathbb{R}^5$ e si consideri l'applicazione $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^5$ definita da

$$L(X) = x_1 Y_1 + x_2 Y_2 + \ldots + x_n Y_n, \text{ con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Determinare quali tra le seguenti affermazioni sono corrette. Per ogni affermazione corretta fornire la dimostrazione e per ogni affermazione errata fornire un controesempio.

1. Sia A la matrice $5 \times n$ le cui colonne sono formate dai vettori $Y_1, \dots, Y_n$:

$$A = (Y_1 | Y_2 | \ldots | Y_n).$$

Allora $L(X) = AX$:

2. L è sempre suriettiva:

3. Se L è iniettiva allora $n \leq 5$:

4. $Y_3 \in \operatorname{Im} L$:

5. Se $n \geq 5$ allora $\dim \operatorname{Ker} L = n - 5$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U\colon \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\-2\end{pmatrix}\right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad$ $\dim V =$ $\qquad$ $\dim(U+V) =$

   (b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per V ed una base per U:

   (c) Stabilire, motivando la risposta, se U è sottospazio di V.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}$ appartiene a $U+V$:

   (e) Scrivere una rappresentazione cartesiane di $U^\perp$:

---

2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\\2 & 1 & 1\\2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare esplicitamente $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

   (b) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (c) Stabilire se L è iniettiva, suriettiva motivando ogni affermazione.

   (d) Determinare una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(e) Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, descrivere $L(\text{span}(\boldsymbol{w}))$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-h^2 & 3+2h+h^2 & 1-2h^2 & 1+h \\ 1+h & 1 & h & 0 \\ 1 & 1+h & -h & 0 \\ 1 & 1 & -3h & -h \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

(b) Determinare per quali valori di h la matrice è invertibile:

(c) Determinare per quali valori di h il sottospazio soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 1:

(d) Posto $h = 0$, risolvere il sistema $AX = \mathbf{0}$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

(b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

(c) Se è possibile, determinare una matrice quadrata N tale che $N^{-1}A\,N$ è una matrice diagonale, giustificando la risposta.

(d) Spiegare se è possibile trovare una matrice ortogonale N che soddisfi i requisiti del punto precedente, e perché.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 2, 0)$, e $Q = (0, 1, -1)$. Determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per O, A e B:

(b) una rappresentazione parametrica della retta s per Q e diretta come AB:

(c) la proiezione ortogonale di Q su π:

(d) la distanza δ_1 fra π e Q, e la distanza δ_2 fra Q e la retta AB:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 febbraio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Sia A matrice 2×2 e sia $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore di A corrispondente all'autovalore 3.

Rispondere alle seguenti domande motivando in modo esaustivo ciascuna risposta:

1. Determinare $A^3\boldsymbol{v}$:
2. Supponendo ora che A sia simmetrica e che 2 sia autovalore di A determinare l'equazione dell'autospazio relativo a 2.
3. Supponendo, invece, che A sia diagonalizzabile e che l'autovalore 3 abbia molteplicità algebrica 2, si può determinare la matrice A? In caso positivo la si calcoli.
4. Sapendo, invece, che la traccia di A è 5, si può concludere che A è diagonalizzabile?
5. Supponendo, invece, che il determinante di A sia 12, si possono determinare tutti gli autovalori di A?

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U\colon \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+t=0 \\ y-t=0 \end{cases} \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim V =$ $\qquad\qquad$ $\dim(U+V) =$

   (b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per V ed una base per U:

   (c) Stabilire, motivando la risposta, se U è sottospazio di V.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U+V$:

   (e) Scrivere una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$:

---

2. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare esplicitamente $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

   (b) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (c) Stabilire se L è iniettiva, suriettiva motivando ogni affermazione.

   (d) Determinare una base per $\operatorname{Ker} L$:

   (e) Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, descrivere $L(\operatorname{span}(\boldsymbol{w}))$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1+h & 2-h & 1 \\ 0 & 1 & -2+h & -1+h \\ 7-3h & 5-2h+h^2 & 7-2h^2 & 4+2h-h^2 \\ 2-h & 1 & 2-h & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

   (b) Determinare per quali valori di h la matrice è invertibile:

   (c) Determinare per quali valori di h il sottospazio soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 1$, risolvere il sistema $AX = \mathbf{0}$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

   (b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

   (c) Se è possibile, determinare una matrice quadrata N tale che $N^{-1} A\, N$ è una matrice diagonale, giustificando la risposta.

   (d) Spiegare se è possibile trovare una matrice ortogonale N che soddisfi i requisiti del punto precedente, e perché.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$, e $Q = (1, 3, 1)$. Determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per O, A e B:

   (b) una rappresentazione parametrica della retta s per Q e diretta come AB:

   (c) la proiezione ortogonale di Q su π:

   (d) la distanza δ_1 fra π e Q, e la distanza δ_2 fra Q e la retta AB:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 febbraio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Siano Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 vettori di $\mathbb{R}^n$ e si consideri l'applicazione $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$L(X) = x_1Y_1 + x_2Y_2 + x_3Y_3 + x_4Y_4, \text{ con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Determinare quali tra le seguenti affermazioni sono corrette. Per ogni affermazione corretta fornire la dimostrazione e per ogni affermazione errata fornire un controesempio.

1. Sia A la matrice $n \times 4$ le cui colonne sono formate dai vettori Y_1, Y_2, Y_3, Y_4:
$$A = (Y_1|Y_2|Y_3|Y_4).$$
Allora $L(X) = AX$:
2. Se $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^n$ allora $n \leq 4$.
3. L è sempre iniettiva.
4. Se $n \geq 4$ allora $\operatorname{Ker} L$ è banale.
5. È possibile determinare Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 in modo che $\dim \operatorname{Im} L = 1$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U\colon \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+t=0 \\ x-t=0 \end{cases} \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\-2\end{pmatrix}\right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim V =$ $\qquad\qquad$ $\dim(U+V) =$

   (b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per V ed una base per U:

   (c) Stabilire, motivando la risposta, se la somma di U e V è diretta.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ appartiene a $U+V$:

   (e) Scrivere una rappresentazione cartesiane di $U^\perp$:

---

2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare esplicitamente $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

   (b) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (c) Stabilire se L è iniettiva, suriettiva motivando ogni affermazione.

   (d) Determinare una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(e) Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, descrivere $L(\text{span}(\boldsymbol{w}))$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1-2h & 1+2h & 3-2h & 2 \\ 0 & 1 & 2h & 2h \\ 2h & 4h^2 & 1-4h^2 & 1-4h^2 \\ 1-2h & 1 & 2-2h & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

(b) Determinare per quali valori di h la matrice è invertibile:

(c) Determinare per quali valori di h il sottospazio soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 1:

(d) Posto $h = 1/2$, risolvere il sistema $AX = \mathbf{0}$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

(b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

(c) Se è possibile, determinare una matrice quadrata N tale che $N^{-1} A\, N$ è una matrice diagonale, giustificando la risposta.

(d) Spiegare se è possibile trovare una matrice ortogonale N che soddisfi i requisiti del punto precedente, e perché.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 1, -2)$, $B = (2, 0, -1)$, e $Q = (1, 1, 0)$. Determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per O, A e B:

(b) una rappresentazione parametrica della retta s per Q e diretta come AB:

(c) la proiezione ortogonale di Q su π:

(d) la distanza δ_1 fra π e Q, e la distanza δ_2 fra Q e la retta AB:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Siano A matrice 2×2 e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ autovettore di A corrispondente all'autovalore -1.

Rispondere alle seguenti domande motivando in modo esaustivo ciascuna risposta:

1. Determinare $A^3\boldsymbol{v}$:

2. Supponendo ora che A sia simmetrica e che 2 sia autovalore di A determinare l'equazione dell'autospazio relativo a 2.

3. Supponendo invece che A sia diagonalizzabile e che l'autovalore -1 abbia molteplicità algebrica 2, si può determinare la matrice A? In caso positivo la si calcoli.

4. Sapendo invece che la traccia di A è -2, si può concludere che A è diagonalizzabile?

5. Supponendo invece che il determinante di A sia 4, si possono determinare tutti gli autovalori di A?

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 febbraio 2012
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U\colon \begin{cases} x + y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim V =$ $\qquad\qquad$ $\dim(U + V) =$

   (b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per V ed una base per U:

   (c) Stabilire, motivando la risposta, se Ue V sono sottospazi complementari in $\mathbb{R}^4$.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a $U + V$:

   (e) Scrivere una rappresentazione cartesiana di $U^{\perp}$:

---

2. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare esplicitamente $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

   (b) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (c) Stabilire se L è iniettiva, suriettiva motivando ogni affermazione.

   (d) Determinare una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

   (e) Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, descrivere $L(\operatorname{span}(\boldsymbol{w}))$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 1-h^2 & 1 \\ h & 1 & h^2 & 1 \\ 1-h & h-1 & 1-2h^2 & 1-h \\ 0 & 0 & h & 1-h \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

   (b) Determinare per quali valori di h la matrice è invertibile:

   (c) Determinare per quali valori di h il sottospazio soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 1:

   (d) Posto $h = 1$, risolvere il sistema $AX = \mathbf{0}$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

   (b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

   (c) Se è possibile, determinare una matrice quadrata N tale che $N^{-1} A\, N$ è una matrice diagonale, giustificando la risposta.

   (d) Spiegare se è possibile trovare una matrice ortogonale N che soddisfi i requisiti del punto precedente, e perché.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (0, -2, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, e $Q = (1, -1, -3)$. Determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per O, A e B:

   (b) una rappresentazione parametrica della retta s per Q e diretta come AB:

   (c) la proiezione ortogonale di Q su π:

   (d) la distanza δ_1 fra π e Q, e la distanza δ_2 fra Q e la retta AB:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 febbraio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Siano $Y_1, \dots Y_n$ vettori di $\mathbb{R}^5$ e si consideri l'applicazione $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^5$ definita da

$$L(X) = x_1Y_1 + x_2Y_2 + \dots + x_nY_n, \ \text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Determinare quali tra le seguenti affermazioni sono corrette. Per ogni affermazione corretta fornire la dimostrazione e per ogni affermazione errata fornire un controesempio.

1. Sia A la matrice $5 \times n$ le cui colonne sono formate dai vettori $Y_1, \dots, Y_n$:
$$A = (Y_1|Y_2|\dots|Y_n)\,.$$
Allora $L(X) = AX$:
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene sempre a $\operatorname{Im} L$:
3. Se L è suriettiva allora $n \geq 5$:
4. Se $n \leq 5$ allora L è iniettiva:
5. Se $Y_1 = Y_2$ allora L non è iniettiva:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U\colon \begin{cases} x + y + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad$ $\dim V =$ $\qquad$ $\dim(U + V) =$

   (b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per V ed una base per U:

   (c) Stabilire, motivando la risposta, se la somma di U e V è diretta.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$:

   (e) Scrivere una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$:

---

2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare esplicitamente $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

   (b) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (c) Stabilire se L è iniettiva, suriettiva motivando ogni affermazione.

   (d) Determinare una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(e) Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, descrivere $L(\mathrm{span}(\boldsymbol{w}))$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-h^2 & 1+h & 1 & 1 \\ 3+2h+h^2 & 1 & 1+h & 1 \\ 1-2h^2 & h & -h & -3h \\ 1+h & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

(b) Determinare per quali valori di h la matrice è invertibile:

(c) Determinare per quali valori di h il sottospazio soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

(d) Posto $h = -2$, risolvere il sistema $AX = \mathbf{0}$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

(b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

(c) Se è possibile, determinare una matrice quadrata N tale che $N^{-1}A\,N$ è una matrice diagonale, giustificando la risposta.

(d) Spiegare se è possibile trovare una matrice ortogonale N che soddisfi i requisiti del punto precedente, e perché.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 0)$, e $Q = (1, 1, 1)$. Determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per O, A e B:

(b) una rappresentazione parametrica della retta s per Q e diretta come AB:

(c) la proiezione ortogonale di Q su π:

(d) la distanza δ_1 fra π e Q, e la distanza δ_2 fra Q e la retta AB:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Siano A matrice 2×2 e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ autovettore di A corrispondente all'autovalore -2.

Rispondere alle seguenti domande motivando in modo esaustivo ciascuna risposta:

1. Determinare $A^5\boldsymbol{v}$:
2. Supponendo ora che A sia simmetrica e che 2 sia autovalore di A determinare l'equazione dell'autospazio relativo a 2.
3. Supponendo invece che A sia diagonalizzabile e che l'autovalore -2 abbia molteplicità algebrica 2, si può determinare la matrice A? In caso positivo la si calcoli.
4. Sapendo invece che la traccia di A è 4, si può concludere che A è diagonalizzabile?
5. Supponendo invece che il determinante di A sia 8, si possono determinare tutti gli autovalori di A?

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U\colon \begin{cases} x+y+t=0 \\ x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad$ $\dim V =$ $\qquad$ $\dim(U+V) =$

   (b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per V ed una base per U:

   (c) Stabilire, motivando la risposta, se U è sottospazio di V.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $U + V$:

   (e) Scrivere una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$:

---

2. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare esplicitamente $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

   (b) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (c) Stabilire se L è iniettiva, suriettiva motivando ogni affermazione.

   (d) Determinare una base per $\operatorname{Ker} L$:

   (e) Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, descrivere $L(\operatorname{span}(\boldsymbol{w}))$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7-3h & 2-h \\ -1+h & 1 & 5-2h+h^2 & 1 \\ 2-h & -2+h & 7-2h^2 & 2-h \\ 1 & -1+h & 4+2h-h^2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

(b) Determinare per quali valori di h la matrice è invertibile:

(c) Determinare per quali valori di h il sottospazio soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 1:

(d) Posto $h = 2$, risolvere il sistema $AX = \mathbf{0}$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

(b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

(c) Se è possibile, determinare una matrice quadrata N tale che $N^{-1} A\, N$ è una matrice diagonale, giustificando la risposta.

(d) Spiegare se è possibile trovare una matrice ortogonale N che soddisfi i requisiti del punto precedente, e perché.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (-2, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, e $Q = (1, 1, -3)$. Determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per O, A e B:

(b) una rappresentazione parametrica della retta s per Q e diretta come AB:

(c) la proiezione ortogonale di Q su π:

(d) la distanza δ_1 fra π e Q, e la distanza δ_2 fra Q e la retta AB:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Siano $Y_1, \dots Y_4$ vettori di $\mathbb{R}^n$ e si consideri l'applicazione $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$L(X) = x_1 Y_1 + x_2 Y_2 + x_3 Y_3 + x_4 Y_4, \text{ con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Determinare quali tra le seguenti affermazioni sono corrette. Per ogni affermazione corretta fornire la dimostrazione e per ogni affermazione errata fornire un controesempio.

1. Sia A la matrice $n \times 4$ le cui colonne sono formate dai vettori $Y_1, \dots, Y_4$:
$$A = (Y_1|Y_2|Y_3|Y_4).$$
Allora $L(X) = AX$:
2. L è sempre iniettiva:
3. Se $n \leq 4$ allora L è suriettiva:
4. $Y_1 + Y_2 + Y_3 \in \operatorname{Im} L$:
5. Se $\operatorname{Ker} L$ non è banale, i vettori Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sono dipendenti:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U: \begin{cases} x+y+t=0 \\ y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \qquad V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\0\end{pmatrix}\right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim V =$ $\qquad\qquad$ $\dim(U+V) =$

   (b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per V ed una base per U:

   (c) Stabilire, motivando la risposta, se la somma di U e V è diretta.

   (d) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ appartiene a $U+V$:

   (e) Scrivere una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$:

---

2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare esplicitamente $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

   (b) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (c) Stabilire se L è iniettiva, suriettiva motivando ogni affermazione.

   (d) Determinare una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(e) Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, descrivere $L(\mathrm{span}(\boldsymbol{w}))$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1-2h & 0 & 2h & 1-2h \\ 1+2h & 1 & 4h^2 & 1 \\ 3-2h & 2h & 1-4h^2 & 2-2h \\ 2 & 2h & 1-4h^2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

(b) Determinare per quali valori di h la matrice è invertibile:

(c) Determinare per quali valori di h il sottospazio soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

(d) Posto $h = 0$, risolvere il sistema $AX = \mathbf{0}$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

(b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

(c) Se è possibile, determinare una matrice quadrata N tale che $N^{-1}A\,N$ è una matrice diagonale, giustificando la risposta.

(d) Spiegare se è possibile trovare una matrice ortogonale N che soddisfi i requisiti del punto precedente, e perché.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (-2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$, e $Q = (1, 1, -1)$. Determinare:

(a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per O, A e B:

(b) una rappresentazione parametrica della retta s per Q e diretta come AB:

(c) la proiezione ortogonale di Q su π:

(d) la distanza δ_1 fra π e Q, e la distanza δ_2 fra Q e la retta AB:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 febbraio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Siano A matrice 2×2 e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore di A corrispondente all'autovalore -3.

Rispondere alle seguenti domande motivando in modo esaustivo ciascuna risposta:

1. Determinare $A^2\boldsymbol{v}$:
2. Supponendo ora che A sia simmetrica e che 2 sia autovalore di A determinare l'equazione dell'autospazio relativo a 2.
3. Supponendo invece che A sia diagonalizzabile e che l'autovalore -3 abbia molteplicità algebrica 2, si può determinare la matrice A? In caso positivo la si calcoli.
4. Sapendo invece che la traccia di A è -6, si può concludere che A è diagonalizzabile?
5. Supponendo invece che il determinante di A sia 12, si possono determinare tutti gli autovalori di A?