CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**3 settembre 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la matrice A associata alla L nelle basi canoniche:

(b) Determinare per quali valori di h l'applicazione L è iniettiva:

(c) **Posto** $h = 0$**,** calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

(d) **Posto** $h = 0$**,** determinare un'equazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(e) **Posto** $h = 1$**,** determinare per $\operatorname{Ker} L$ una base e una sua equazione cartesiana:

---

2. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x - y + z = 2x + t = 0 \right\} \qquad V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad$; $\qquad$ $\dim V =$ $\qquad$;

(b) Scrivere una equazione cartesiana per V

(c) determinare una base per U:

(d) Determinare la dimensione dello spazio somma $U + V$:

(e) Determinare una base di $V^{\perp}$:

---

3. Si considerino la seguente matrice quadrata A e l vettore B dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & h & -1 \\ 2 & 1+h & 2h & h \\ 1 & h & h & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} h \\ 1+h \\ 2+h \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

(b) Determinare per quali valori di h il sistema lineare non omogeneo $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Posto $h = -1$, determinare una base di $\operatorname{Ker} A$ e risolvere il sistema $AX = B$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

(b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

(c) Per ciascun autovalore si determini un'equazione cartesiana del corrispondente autospazio.

(d) Discutere la diagonalizzabilità della matrice A.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 1, 2)$, $B = (0, 1, -1)$, e $C = (1, -1, 0)$. Determinare:

(a) l'equazione cartesiana per il piano π passante per A, B e C:

(b) una rappresentazione parametrica della retta AB:

(c) la proiezione ortogonale di O su π:

(d) l'area del triangolo ABC:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	3 settembre 2012
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Fissata la base $\mathcal{B} = \{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$ in $\mathbb{E}^3_O$, lo spazio vettoriale dei vettori dello spazio applicati in un punto O, sia assegnato $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$.

1. Scrivere l'equazione in forma cartesiana del piano π passante per l'origine ortogonale a $\boldsymbol{u}$.
2. Scegliendo due vettori indipendenti in π, costruire una base ortogonale $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ di $\mathbb{E}^3_O$, che abbia come primo vettore il vettore $\boldsymbol{u}$ assegnato.
3. Sia r la retta $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$. Si consideri l'operatore lineare $L\colon \mathbb{E}^3_O \to \mathbb{E}^3_O$ che associa ad un qualunque vettore $\boldsymbol{v}$ il vettore simmetrico di $\boldsymbol{v}$ rispetto ad r. Come viene trasformato il vettore $\boldsymbol{u}$ dalla L?
4. Scrivere esplicitamente $L(\boldsymbol{u})$, $L(\boldsymbol{u}_2)$, $L(\boldsymbol{u}_3)$.
5. Calcolare $L(\hat{\boldsymbol{\imath}})$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**3 settembre 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} h^2 - 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare la matrice A associata alla L nelle basi canoniche:

   (b) Determinare per quali valori di h l'applicazione L è iniettiva:

   (c) **Posto** $h = 0$**,** calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (d) **Posto** $h = 0$**,** determinare un'equazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

   (e) **Posto** $h = -2$**,** determinare per $\operatorname{Ker} L$ una base e una sua equazione cartesiana:

---

2. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ed indicato con (x, y, z, t) l'associato sistema di coordinate, si considerino i sottospazi:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + z + t = 2x + y = 0 \right\} \qquad V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad$; $\qquad$ $\dim V =$ $\qquad$;

   (b) Scrivere un'equazione cartesiana per V

   (c) determinare una base per U:

   (d) Determinare la dimensione dello spazio somma $U + V$:

   (e) Determinare una base di $V^{\perp}$:

---

3. Si considerino la seguente matrice quadrata A e l vettore B dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & (h-1) & (h-1) & -1 \\ 1 & h & (h-1) & 1 \\ 2 & (h-1) & (2h-2) & h-1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} h-1 \\ 1+h \\ h-1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

(b) Determinare per quali valori di h il sistema lineare non omogeneo $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Posto $h = -1$, determinare una base di $\operatorname{Ker} A$ e risolvere il sistema $AX = B$:

---

4. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche.

(b) Per ciascun autovalore si determini una base del corrispondente autospazio.

(c) Per ciascun autovalore si determini l'equazione/i cartesiane del corrispondente autospazio.

(d) Discutere la diagonalizzabilità della matrice A.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$, e $C = (1, 0, 1)$. Determinare:

(a) un'equazione cartesiana per il piano π passante per A, B e C:

(b) una rappresentazione parametrica della retta AB:

(c) la proiezione ortogonale di O su π:

(d) l'area del triangolo ABC:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**3 settembre 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Fissata la base $\mathcal{B} = \{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$ in $\mathbb{E}^3_O$, lo spazio vettoriale dei vettori dello spazio applicati in un punto O, sia assegnato $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$.

1. Scrivere l'equazione in forma cartesiana del piano π passante per l'origine ortogonale a $\boldsymbol{v}$.
2. Scegliendo due vettori indipendenti in π, costruire una base ortogonale $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ di $\mathbb{E}^3_O$, che abbia come primo vettore il vettore $\boldsymbol{u}$ assegnato.
3. Sia r la retta Span$(\boldsymbol{u})$, $\hat{\boldsymbol{u}}_2 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{u}_2||}\boldsymbol{u}_2$ e $\hat{\boldsymbol{u}}_3 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{u}_3||}\boldsymbol{u}_3$. Si consideri l'operatore $L\colon \mathbb{E}^3_O \to \mathbb{E}^3_O$ che associa ad un qualunque vettore $\boldsymbol{v}$ il vettore $\boldsymbol{v}'$ ruotato di $\pi/2$ attorno ad r e tale che $L(\hat{\boldsymbol{u}}_2) = \hat{\boldsymbol{u}}_3$. Come viene trasformato il vettore $\boldsymbol{u}$ dalla L?
4. Scrivere esplicitamente $L(\boldsymbol{u}_2)$, $L(\hat{\boldsymbol{u}}_3)$, $L(\boldsymbol{u}_3)$.
5. Calcolare $L(\hat{\boldsymbol{\imath}})$.