

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	4 settembre 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ -x + y + 2z \\ 2x - 2y - z \end{pmatrix}.$$

- (a) Scrivere la matrice A che rappresenta L nella base canonica di \mathbb{R}^3 :
- (b) Calcolare: $\dim \text{Ker } L =$ $\dim \text{Im } L =$
- (c) Scrivere una base per $\text{Ker } L$ e una per $\text{Im } L$:
- (d) Trovare le equazioni cartesiane per $\text{Ker } L$ e $\text{Im } L$:
- (e) Determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle controimmagini di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$:

2. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 2hy = h + 1 \\ hx + (1 + 3h)y = 0 \\ x + (1 - 2h)y = 2 + h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}.$$

- (a) Scrivere la matrice A dei coefficienti e la colonna B dei termini noti:
- (b) Stabilire per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
- (c) Stabilire per quali valori di h il sistema ammette un'unica soluzione:
- (d) Risolvere il sistema per $h = -1$:

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcolare: $\det A =$ $\operatorname{rg} A =$
 - (b) Scrivere il polinomio caratteristico di A :
 - (c) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche:
 - (d) Determinare una base di ciascun autospazio di A :

 - (e) Stabilire se esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^3 composta da autovettori di A . In caso positivo, determinarla.
-

4. Si considerino i seguenti vettori: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e siano θ l'angolo convesso da essi determinato e V il sottospazio da essi generato.

- (a) Calcolare: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle =$ $\theta =$
 - (b) Calcolare: $\dim V =$ $\dim V^\perp =$
 - (c) Trovare una base ortogonale di V :

 - (d) Scrivere le equazioni di V^\perp :
-

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, si considerino i piani $\alpha: x + y + z = 0$ e $\beta: 2x - y + z = 1$.

- (a) Determinare la direzione della retta r intersezione dei piani α e β :

 - (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale a r passante per O :

 - (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r ed il punto $A = (1, 0, 1)$:

 - (d) Determinare i punti P della retta r che distano $\sqrt{2}$ dall'origine O :
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	4 settembre 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calcolare: $q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ $q \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$

2. Stabilire, giustificando ogni affermazione, se è vero che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $X \in \mathbb{R}^2$ risulta:

$$q(\lambda X) = \lambda q(X).$$

3. Stabilire qual è il segno di q .

4. Scrivere una forma canonica per q .

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	4 settembre 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + 4y - 2z \\ -x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

- (a) Scrivere la matrice A che rappresenta L nella base canonica di \mathbb{R}^3 :
- (b) Calcolare: $\dim \text{Ker } L =$ $\dim \text{Im } L =$
- (c) Scrivere una base per $\text{Ker } L$ e una per $\text{Im } L$:
- (d) Trovare le equazioni cartesiane per $\text{Ker } L$ e $\text{Im } L$:
- (e) Determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle controimmagini di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$:
-

2. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 2(h - 1)y = h \\ (h - 1)x + (3h - 2)y = 0 \\ x + (3 - 2h)y = 1 + h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}.$$

- (a) Scrivere la matrice A dei coefficienti e la colonna B dei termini noti:
- (b) Stabilire per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
- (c) Stabilire per quali valori di h il sistema ammette un'unica soluzione:
- (d) Risolvere il sistema per $h = 2/3$:
-

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcolare: $\det A =$ $\operatorname{rg} A =$
 - (b) Scrivere il polinomio caratteristico di A :
 - (c) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche:
 - (d) Determinare una base di ciascun autospazio di A :
 - (e) Stabilire se esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^3 composta da autovettori di A . In caso positivo, determinarla.
-

4. Si considerino i seguenti vettori: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e siano θ l'angolo convesso da essi determinato e V il sottospazio da essi generato.

- (a) Calcolare: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle =$ $\theta =$
 - (b) Calcolare: $\dim V =$ $\dim V^\perp =$
 - (c) Trovare una base ortogonale di V :
 - (d) Scrivere le equazioni di V^\perp :
-

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, si considerino i piani $\alpha: x + y - z = 0$ e $\beta: x - 2y + z = 1$.

- (a) Determinare la direzione della retta r intersezione dei piani α e β :
 - (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale a r passante per O :
 - (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r ed il punto $A = (0, -1, -1)$:
 - (d) Determinare i punti P della retta r che distano $\sqrt{2}$ dall'origine O :
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	4 settembre 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calcolare: $q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ $q \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

2. Stabilire, giustificando ogni affermazione, se è vero che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $X \in \mathbb{R}^2$ risulta:

$$q(\lambda X) = \lambda q(X).$$

3. Stabilire qual è il segno di q .

4. Scrivere una forma canonica per q .
