| CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA | 11 novembre 2013 |
|---|---|
| Cognome e Nome: | Matricola: |
| Corso di Laurea: | Anno di corso: |

1. Si consideri il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + 2x_2 + x_4 = x_3 - x_2 = 0$ ed il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) La dimensione di $V$ ed una base $\mathcal{B}$ per $V$:

   (b) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{u}$ appartiene a $V$ ed in caso affermativo trovare le coordinate di $\boldsymbol{u}$ nella base $\mathcal{B}$:

   (c) La dimensione di $V^\perp$ ed una sua rappresentazione cartesiana:

---

2. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, si consideri l'operatore lineare $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim \operatorname{Im} L_A =$ $\dim \operatorname{Ker} L_A =$

   (b) Scrivere le equazioni dei sottospazi $\operatorname{Im} L_A$ e $\operatorname{Ker} L_A$:

   (c) Stabilire, giustificando ogni affermazione, quali dei vettori della base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ siano autovettori di $A$.

   (d) Descrivere la varietà lineare $\{X \in \mathbb{R}^4 \mid A\,X = B\}$, dove $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

---

3. Si considerino la matrice $A$ dipendente dal parametro $k$, il vettore $B \in \mathbb{R}^3$ ed il vettore $X$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} (k-2) & k & (2k-1) & (2k-1) \\ k & -k & -k & -1 \\ (k-2) & k & (2k-1) & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Determinare:

(a) $\mathrm{rg}(A)$ e $\dim \operatorname{Ker} A$ al variare del parametro $k$:

(b) Per quali valori di $k$ il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Per quali valori di $k$ la soluzione ha dimensione massima:

(d) La soluzione generale del sistema $AX = B$ per $k = 2$:

---

4. Si consideri la matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere il polinomio caratteristico di $A$.

(b) Determinare gli autovalori di $A$ con relative molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare le equazioni degli autospazi di $A$.

(d) Stabilire se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di $A$. In caso positivo, determinare tale base.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ con sistema di coordinate $(x, y, z)$, sono assegnati il punto $P = (1, 1, 0)$ e la retta $r\colon x - z = x + y + z = 0$. Determinare:

(a) la direzione $\boldsymbol{d}$ di $r$:

(b) l'equazione del piano $\pi$ contenente $P$ ed $r$:

(c) l'equazione del piano $\alpha$ passante per $P$ perpendicolare a $r$:

(d) la distanza di $P$ da $r$:

---

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **11 novembre 2013** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di Laurea:** | **Anno di corso:** |

**Svolgere in modo completo il seguente esercizio**.

Considerare la seguente matrice quadrata $N \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare: $\det(N)$, $\det(2N)$, $\det(N^4)$.
2. Mostrare che $\mathcal{B} = \{N^1, N^2, N^3, N^4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
3. Trovare le coordinate del vettore $\boldsymbol{e}_1$ della base canonica di $\mathbb{R}^4$ nella base $\mathcal{B}$.
4. Trovare le coordinate del vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$.
5. Calcolare la matrice inversa $N^{-1}$.

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **11 novembre 2013** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di Laurea:** | **Anno di corso:** |

1. Si consideri il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $2x_1 + x_2 + x_4 = x_3 - x_1 = 0$ ed il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) La dimensione di $V$ ed una base $\mathcal{B}$ per $V$:

   (b) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{u}$ appartiene a $V$ ed in caso affermativo trovare le coordinate di $\boldsymbol{u}$ nella base $\mathcal{B}$:

   (c) La dimensione di $V^\perp$ ed una sua rappresentazione cartesiana:

---

2. Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, si consideri l'operatore lineare $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim \operatorname{Im} L_A =$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Ker} L_A =$

   (b) Scrivere le equazioni dei sottospazi $\operatorname{Im} L_A$ e $\operatorname{Ker} L_A$:

   (c) Stabilire, giustificando ogni affermazione, quali dei vettori della base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ siano autovettori di $A$.

   (d) Descrivere la varietà lineare $\{X \in \mathbb{R}^4 \mid A\,X = B\}$, dove $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

---

3. Si considerino la matrice $A$ dipendente dal parametro $h$, il vettore $B \in \mathbb{R}^3$ ed il vettore $X$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} (h-1) & (h+1) & (2h+1) & (2h+1) \\ (h+1) & -(h+1) & -(h+1) & -1 \\ (h-1) & (h+1) & (2h+1) & (h+1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Determinare:

(a) $\mathrm{rg}(A)$ e $\dim \operatorname{Ker} A$ al variare del parametro $h$:

(b) Per quali valori di $h$ il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Per quali valori di $h$ la soluzione ha dimensione massima:

(d) La soluzione generale del sistema $AX = B$ per $h = 2$:

---

4. Si consideri la matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere il polinomio caratteristico di $A$.

(b) Determinare gli autovalori di $A$ con relative molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare le equazioni degli autospazi di $A$.

(d) Stabilire se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di $A$. In caso positivo, determinare tale base.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ con sistema di coordinate $(x, y, z)$, sono assegnati il punto $P = (0, 1, 0)$ e la retta $r\colon y - z = x + y + z = 0$. Determinare:

(a) la direzione $\boldsymbol{d}$ di $r$:

(b) l'equazione del piano $\pi$ contenente $P$ ed $r$:

(c) l'equazione del piano $\alpha$ passante per $P$ perpendicolare a $r$:

(d) la distanza di $P$ da $r$:

---

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **11 novembre 2013** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di Laurea:** | **Anno di corso:** |

**Svolgere in modo completo il seguente esercizio.**

Considerare la seguente matrice quadrata $N \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare: $\det(N)$, $\det(3N)$, $\det(N^3)$.
2. Mostrare che $\mathcal{B} = \{N^1, N^2, N^3, N^4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
3. Trovare le coordinate del vettore $\boldsymbol{e}_4$ della base canonica di $\mathbb{R}^4$ nella base $\mathcal{B}$.
4. Trovare le coordinate del vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$.
5. Calcolare la matrice inversa $N^{-1}$.