CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 giugno 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & -16 \\ -2 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A; determinare

(a) $\dim \operatorname{Ker} L_A =$;

(b) Una rappresentazione di $\operatorname{Im} L_A$ in forma cartesiana:

(c) Gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche:

(d) Una rappresentazione cartesiana di ogni autospazio di A:

(e) Per ciascun autovalore, una base del corrispondente autospazio.

---

2. Si considerino il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1+h \\ h \\ h \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad \dim U^{\perp} =$

(b) Scrivere un sistema di equazioni cartesiane per U:

(c) Trovare una base ortogonale di U:

(d) Trovare una base di $U^{\perp}$:

(e) Determinare per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a U:

---

3. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale h, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-h^2 & h^2+2h+3 & 1-2h^2 & 1+h \\ 1+h & 1 & h & 0 \\ 1 & 1+h & -h & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ h \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietá lineare delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 0$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietá lineare delle soluzioni:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1\colon 2x + 3y - z = 1$ e $\pi_2\colon x - 2y + z = 0$; sia r la retta $\pi_1 \cap \pi_2$, e sia A il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) la direzione $\boldsymbol{d}_r$ della retta r:

   (b) le intersezioni di π_1 con gli assi cartesiani:

   (c) l'equazione del piano π_0 parallelo a π_1 e passante per l'origine O:

   (d) l'equazione cartesiana del piano α parallelo alla retta r e passante per A e per O:

   (e) la distanza di π_1 da π_0:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 giugno 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A; determinare

(a) $\dim \operatorname{Im} L_A =$.

(b) Una base di $\operatorname{Ker} L_A$:

(c) Gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche:

(d) Una rappresentazione cartesiana di ogni autospazio di A:

(e) Per ciascun autovalore, una base del corrispondente autospazio.

---

2. Si considerino il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2+h \\ h \\ h \\ 2+2h \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad \dim U^{\perp} =$

(b) Scrivere un sistema di equazioni cartesiane per U:

(c) Trovare una base ortogonale di U:

(d) Trovare una base di $U^{\perp}$:

(e) Determinare per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a U:

---

3. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale k, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2k-k^2 & 2+k^2 & 4k-2k^2-1 & k \\ k & 1 & k-1 & 0 \\ 1 & k & 1-k & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k la varietá lineare delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Posto $k = 1$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietá lineare delle soluzioni:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1: x+2y-z=1$ e $\pi_2: x-3y+z=0$; sia r la retta $\pi_1 \cap \pi_2$, e sia A il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) la direzione $\boldsymbol{d}_r$ della retta r:

(b) le intersezioni di π_1 con gli assi cartesiani:

(c) l'equazione del piano π_0 parallelo a π_1 e passante per l'origine O;

(d) l'equazione cartesiana del piano α parallelo alla retta r e passante per A e per O:

(e) la distanza di π_1 da π_o:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 giugno 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -16 & -2 & 16 \end{pmatrix}.$$

Sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A; determinare

(a) $\dim \operatorname{Ker} L_A =$;

(b) Una rappresentazione di $\operatorname{Im} L_A$ in forma cartesiana:

(c) Gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche:

(d) Una rappresentazione cartesiana di ogni autospazio di A:

(e) Per ciascun autovalore, una base del corrispondente autospazio.

---

2. Si considerino il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3+h \\ h \\ h \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad \dim U^{\perp} =$

(b) Scrivere un sistema di equazioni cartesiane per U:

(c) Trovare una base ortogonale di U:

(d) Trovare una base di $U^{\perp}$:

(e) Determinare per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a U:

3. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale h, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 4h - h^2 - 4 & 3 - 2h + h^2 & 8h - 2h^2 - 7 & h - 1 \\ h - 1 & 1 & h - 2 & 0 \\ 1 & h - 1 & 2 - h & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h - 2 \\ h - 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di h:

(b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di h la varietá lineare delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Posto $h = 2$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietá lineare delle soluzioni:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon x - 2y - 3z = -1$ e $\pi_2 \colon x + y - 2z = 0$; sia r la retta $\pi_1 \cap \pi_2$, e sia A il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) la direzione $\boldsymbol{d}_r$ della retta r:

(b) le intersezioni di π_1 con gli assi cartesiani:

(c) l'equazione del piano π_0 parallelo a π_1 e passante per l'origine O:

(d) l'equazione cartesiana del piano α parallelo alla retta r e passante per A e per O:

(e) la distanza di π_1 da π_0:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 giugno 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A; determinare

(a) $\dim \operatorname{Im} L_A = \qquad .$

(b) Una base di $\operatorname{Ker} L_A$:

(c) Gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche:

(d) Una rappresentazione cartesiana di ogni autospazio di A:

(e) Per ciascun autovalore, una base del corrispondente autospazio.

---

2. Si considerino il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ed il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4+h \\ h \\ -h \\ 4+2h \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare: $\dim U = \qquad \dim U^{\perp} =$

(b) Scrivere un sistema di equazioni cartesiane per U:

(c) Trovare una base ortogonale di U:

(d) Trovare una base di $U^{\perp}$:

(e) Determinare per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene a U:

---

3. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale k, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 6k-k^2-7 & k^2-4k+6 & 12k-2k^2-17 \\ 0 & k-2 & 1 & k-3 \\ 0 & 1 & k-2 & 3-k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k-3 \\ k-3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k la varietá lineare delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Posto $k = 3$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietá lineare delle soluzioni:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon x+y+2z = 1$ e $\pi_2 \colon x-y-3z = 0$; sia r la retta $\pi_1 \cap \pi_2$, e sia A il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) la direzione $\boldsymbol{d}_r$ della retta r:

(b) le intersezioni di $\pi_1$con gli assi cartesiani:

(c) l'equazione del piano π_0 parallelo a π_1 e passante per l'origine O;

(d) l'equazione cartesiana del piano α parallelo alla retta r e passante per A e per O:

(e) la distanza di π_1 da π_o:
