CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Sia A una matrice $k \times n$, si consideri il *sistema lineare omogeneo*: $AX = \mathbf{0}_k$.

(a) Mostrare che l'insieme delle soluzioni del sistema è un *sottospazio* di $\mathbb{R}^n$;

(b) discutere sotto quali condizioni il sistema ammette **solo** la *soluzione banale*.

B. Dare la definizione della relazione di *similitudine* tra matrici $n \times n$. Dimostrare che se A e B sono matrici simili, allora hanno lo stesso *polinomio caratteristico*.

---

1. Sia $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) E costituisce una lista di *generatori* di $\mathbb{R}^3$?

(b) E costituisce una *base* di $\mathbb{R}^3$?

---

2. Siano U e W *sottospazi* di $\mathbb{R}^7$ entrambi di dimensione 5. Quali valori può assumere $\dim(U \cap W)$?

---

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare*. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},$$

calcolare $L\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$.

---

4. Fissato in $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare, sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio non nullo. Definire il *complemento ortogonale* di V.

---

5. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare* tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$.

   Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) L non è suriettiva; sì ◯ no ◯

   (b) non ci sono abbastanza informazioni per determinare $\operatorname{Im} L$; sì ◯ no ◯

   (c) L è iniettiva; sì ◯ no ◯

   (d) $\dim \operatorname{Im} L = 2$. sì ◯ no ◯

---

6. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 tale che il suo polinomio caratteristico sia $p_A(t) = (2-t)(t^2+4)$.

   Determinare gli autovalori di A. È possibile che A sia *diagonalizzabile* (motivare la risposta)?

---

7. Sia $W = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \begin{pmatrix}1+\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Mostrare che W è una *varietà lineare* di $\mathbb{R}^2$. W è anche un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ (giustificare la risposta)?

---

8. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ due matrici quadrate di ordine n. Supponiamo che 2 sia *autovalore* di A e 7 *autovalore* di B e che i sottospazi $\operatorname{Ker}(A-2I_n)$ e $\operatorname{Ker}(B-7I_n)$ *non* siano in somma diretta. Mostrare che 14 è autovalore di AB.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Siano A una matrice $k \times n$ e $B \in \mathbb{R}^k$ *non nullo*. Enunciare e dimostrare il *Teorema di Rouché-Capelli* per il sistema lineare $AX = B$.

B. Dare la definizione di matrice *ortogonale* $n \times n$. Dimostrare che una matrice A $n \times n$ è ortogonale se e solo le sue colonne sono una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^n$.

---

1. Sia $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\}$.

   (a) E costituisce una *base* di $\mathbb{R}^3$?

   (b) E costituisce una lista di *generatori* di $\mathbb{R}^3$?

---

2. Siano U e W *sottospazi* di $\mathbb{R}^8$ entrambi di dimensione 5. Quali valori può assumere $\dim(U \cap W)$?

---

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare*. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

calcolare $L\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$.

---

4. Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Cosa sono le *coordinate* di un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$?

---

5. Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un *operatore lineare* tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) L non è iniettiva; sì ◯ no ◯

   (b) non ci sono abbastanza informazioni per determinare se L è iniettiva; sì ◯ no ◯

   (c) L è suriettiva; sì ◯ no ◯

   (d) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$. sì ◯ no ◯

---

6. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 tale che il suo polinomio caratteristico sia $p_A(t) = (t+1)(-t^2-1)$. Determinare gli autovalori di A. È possibile che A sia *simmetrica*? (motivare la risposta)?

---

7. Sia $W = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\2\lambda\\\mu\end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$. Mostrare che W è un *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^3$. W è anche una varietà lineare di $\mathbb{R}^3$ (giustificare la risposta)?

---

8. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ due matrici quadrate di ordine n. Supponiamo che 3 sia *autovalore* di A e 5 *autovalore* di B e che i sottospazi $\operatorname{Ker}(A-3I_n)$ e $\operatorname{Ker}(B-5I_n)$ *non* siano in somma diretta. Mostrare che 8 è autovalore di $A+B$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Sia $L\colon V \to W$ un'*applicazione lineare* tra spazi vettoriali.

   (a) Mostrare che $\operatorname{Ker} L$ è un *sottospazio* di V;

   (b) dimostrare che se $\dim V > \dim W$, allora $\operatorname{Ker} L$ non è *banale*.

B. Enunciare il *Teorema Spettrale*. Sia A una matrice *simmetrica* $n \times n$, mostrare che se α e β sono autovalori distinti di A, gli autospazi V_α e V_β sono ortogonali.

---

1. Sia $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$.

   (a) E costituisce una *base* di $\mathbb{R}^3$?

   (b) E costituisce una lista di *generatori* di $\mathbb{R}^3$?

---

2. Siano U e W sottospazi di $\mathbb{R}^8$ entrambi di dimensione 5. Stabilire se la *somma* $U + W$ può essere *diretta*.

---

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare*. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

calcolare $L\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$.

---

4. Sia V uno spazio vettoriale, $V \neq \{\mathbf{0}_V\}$. Dare la definizione di *dimensione* di V.

---

5. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare* tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

   Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) L è iniettiva; sì ◯ no ◯

   (b) non ci sono abbastanza informazioni per determinare se L è suriettiva; sì ◯ no ◯

   (c) $\dim \operatorname{Ker} L = 1$; sì ◯ no ◯

   (d) L è suriettiva. sì ◯ no ◯

---

6. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 tale che il suo polinomio caratteristico sia $p_A(t) = -(t+1)(t^2 - t)$. Determinare gli autovalori di A. È possibile che A sia *invertibile*? (motivare la risposta)?

---

7. Sia $W = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \begin{pmatrix}3-\lambda\\6-2\lambda\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Mostrare che W è una *varietà lineare* di $\mathbb{R}^2$. W è anche un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ (giustificare la risposta)?

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ una matrice quadrata di ordine n. Supponiamo che X sia *autovettore* di A associato all'autovalore 3. Mostrare che X è autovettore di A^2 e determinare l'autovalore.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Sia $L\colon V \to W$ un'*applicazione lineare* tra spazi vettoriali.

(a) Mostrare che $\operatorname{Im} L$ è un sottospazio di W;

(b) dimostrare che se $\dim V = n$, allora $\dim \operatorname{Im} L \leq n$.

B. Dare la definizione di matrice *diagonalizzabile*. Sia A una matrice 2×2 con autovalori $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dimostrare che A è diagonalizzabile.

---

1. Sia $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) E costituisce una *base* di $\mathbb{R}^3$?

(b) E costituisce una lista di *generatori* di $\mathbb{R}^3$?

---

2. Siano U e W *sottospazi* di $\mathbb{R}^7$ entrambi di dimensione 4. Quali valori può assumere $\dim(U \cap W) =$?

---

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare*. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

calcolare $L\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$.

---

4. Siano $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ *vettori* di uno spazio vettoriale V. Definire l'insieme $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.

---

5. Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare* tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) L è iniettiva; sì ◯ no ◯

   (b) non ci sono abbastanza informazioni per determinare se L è suriettiva; sì ◯ no ◯

   (c) $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$; sì ◯ no ◯

   (d) L è suriettiva. sì ◯ no ◯

---

6. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 tale che il suo polinomio caratteristico sia $p_A(t) = -t^3 - 2t$. Determinare gli autovalori di A. È possibile che A sia *diagonalizzabile*? (motivare la risposta)?

---

7. Sia $W = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X = \begin{pmatrix}1+\lambda\\ \lambda-\mu\\ 1+\mu\end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$. Mostrare che W è una *varietà lineare* di $\mathbb{R}^3$. W è anche un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ (giustificare la risposta)?

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ una matrice quadrata di ordine n. Supponiamo che X sia *autovettore* di A associato all'autovalore 5. Mostrare che X è autovettore di $A + I_n$ e determinare l'autovalore.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Dare la definizione della relazione di *similitudine* tra matrici $n \times n$. Dimostrare che se A e B sono matrici simili, allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

B. Siano A una matrice $k \times n$ e $B \in \mathbb{R}^k$ *non nullo*. Enunciare e dimostrare il *Teorema di Rouché-Capelli* per il sistema lineare $AX = B$.

---

1. Sia $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   (a) E costituisce una *base* di $\mathbb{R}^3$?

   (b) E costituisce una lista di *generatori* di $\mathbb{R}^3$?

---

2. Siano U e W sottospazi di $\mathbb{R}^8$ entrambi di dimensione 5. Stabilire se la *somma* $U + W$ può essere *diretta*.

---

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare*. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}.$$

calcolare $L\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

---

4. Siano $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Quando i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ sono un sistema di *generatori* di V?

---

5. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare* tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$.

   Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) L è iniettiva; sì ◯ no ◯

   (b) non ci sono abbastanza informazioni per determinare se L è suriettiva; sì ◯ no ◯

   (c) $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$; sì ◯ no ◯

   (d) $\operatorname{Ker} L$ è banale . sì ◯ no ◯

---

6. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 tale che il suo polinomio caratteristico sia $p_A(t) = -t^2(t+2)$. Determinare gli autovalori di A. È possibile che A sia *invertibile*? (motivare la risposta)?

---

7. Sia $W = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \begin{pmatrix}-3\lambda\\1+\lambda\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Mostrare che W è una *varietà lineare* di $\mathbb{R}^2$. W è anche un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ (giustificare la risposta)?

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ una matrice quadrata di ordine n. Supponiamo che X sia *autovettore* di A associato all'autovalore 6. Mostrare che X è autovettore di $A - I_n$ e determinare l'autovalore.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Sia $L\colon V \to V$ un *operatore lineare* ad α un *autovalore* di L. Definire l' autospazio V_α, mostrare che è un sottospazio di V e che $V_\alpha \neq \{\mathbf{0}_V\}$.

B. Dare la definizione di matrice *ortogonale* $n \times n$. Dimostrare che una matrice A $n \times n$ è ortogonale se e solo le sue colonne sono una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^n$.

---

1. Sia $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   (a) E costituisce una *base* di $\mathbb{R}^3$?

   (b) E costituisce una lista di *generatori* di $\mathbb{R}^3$?

---

2. Siano U e W *sottospazi* di $\mathbb{R}^9$ entrambi di dimensione 6. Quali valori può assumere $\dim(U \cap W)$?

---

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'*applicazione lineare*. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

calcolare $L\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$.

---

4. Siano $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Quando i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ sono una *base* di V?

---

5. Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'*applicazione lineare* tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

   Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) L è suriettiva; sì ◯ no ◯
   (b) $\operatorname{Ker} L$ è banale; sì ◯ no ◯
   (c) $\dim \operatorname{Im} L = 2$; sì ◯ no ◯
   (d) L non è iniettiva. sì ◯ no ◯

---

6. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 tale che il suo polinomio caratteristico sia $p_A(t) = -t(t^2+2)$. Determinare gli autovalori di A. È possibile che A sia *simmetrica*? (motivare la risposta)?

---

7. Sia $W = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X = \begin{pmatrix}\lambda - \mu\\2\mu + \lambda\\-\lambda\end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$. Mostrare che W è un *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^3$. W è anche una varietà lineare di $\mathbb{R}^3$ (giustificare la risposta)?

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ una matrice quadrata *invertibile* di ordine n. Supponiamo che X sia *autovettore* di A associato all'autovalore 2. Mostrare che X è autovettore di A^{-1} e determinare l'autovalore.
