CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2h & 6 & 4 \\ 3 & h & 2 \\ 2h+3 & h+6 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ h^2 - 3h + 12 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x + y + z \\ 3x - y + 2z \\ -x + 2y - z \end{pmatrix}$ e sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x + 3y = 0$.

   (a) Determinare la matrice A associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

   (b) Determinare dimensione e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare dimensione e equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

   (d) Determinare $\dim(\ker L \cap U)$ e $\dim(\ker L + U)$

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Stabilire quali tra i seguenti vettori sono autovettori di A ed in caso affermativo determinare l'autovalore associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \; X_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   (b) Determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi:

   (d) Stabilire se A è diagonalizzabile.

---

4. Si consideri il sottospazio di $U \subset \mathbb{R}^4$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale h:

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1+h \\ 3 \\ 1-h \\ 7 \end{pmatrix}.$$

   (a) Trovare una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

   (b) Completare la base trovata ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$:

   (c) Determinare una base di $U^\perp$:

   (d) Determinare h affinché $\boldsymbol{v}$ appartenga a U:

   (e) Per il valore di h trovato, calcolare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2h & 6 & 4h \\ 3 & h & 6 \\ 2h-3 & 6-h & 4h-6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ h^2+3h-12 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1:

   (d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z-t \\ -2x+y-z+2t \\ x+y+2z-t \end{pmatrix}$ e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x + y = t = 0$.

   (a) Determinare la matrice A associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare dimensione e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare dimensione e equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

   (d) Determinare $\dim(\ker L \cap U)$ e $\dim(\ker L + U)$

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire quali tra i seguenti vettori sono autovettori di A ed in caso affermativo determinare l'autovalore associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi:

(d) Stabilire se A è diagonalizzabile.

---

4. Si consideri il sottospazio di $U \subset \mathbb{R}^4$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale h:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+h \\ 1-h \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Trovare una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

(b) Completare la base trovata ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$:

(c) Determinare una base di $U^{\perp}$:

(d) Determinare h affinché $\boldsymbol{v}$ appartenga a U:

(e) Per il valore di h trovato, calcolare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2h+2 & 6 & 4 \\ 3 & h+1 & 2 \\ 2h+5 & h+7 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ h^2-2h+12 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x+2y+z \\ -x+3y+2z \\ 2x-y-z \end{pmatrix}$ e sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $3x + y = 0$.

   (a) Determinare la matrice A associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

   (b) Determinare dimensione e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare dimensione e equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

   (d) Determinare $\dim(\ker L \cap U)$ e $\dim(\ker L + U)$

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire quali tra i seguenti vettori sono autovettori di A ed in caso affermativo determinare l'autovalore associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi:

(d) Stabilire se A è diagonalizzabile.

---

4. Si consideri il sottospazio di $U \subset \mathbb{R}^4$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale h:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1+h \\ 2 \\ 1+h \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Trovare una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

(b) Completare la base trovata ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$:

(c) Determinare una base di $U^{\perp}$:

(d) Determinare h affinché $\boldsymbol{v}$ appartenga a U:

(e) Per il valore di h trovato, calcolare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 gennaio 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2h+2 & 6 & 4h+4 \\ 3 & h+1 & 6 \\ 2h-1 & 5-h & 4h-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ h^2+4h-12 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1:

   (d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+3z-t \\ x-2y-z+2t \\ x+y+2z-t \end{pmatrix}$ e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x + y = t = 0$.

   (a) Determinare la matrice A associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare dimensione e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare dimensione e equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

   (d) Determinare $\dim(\ker L \cap U)$ e $\dim(\ker L + U)$

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Stabilire quali tra i seguenti vettori sono autovettori di A ed in caso affermativo determinare l'autovalore associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi:

   (d) Stabilire se A è diagonalizzabile.

---

4. Si consideri il sottospazio di $U \subset \mathbb{R}^4$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale h:

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1+h \\ 3 \\ 1-h \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Trovare una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

   (b) Completare la base trovata ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$:

   (c) Determinare una base di $U^\perp$:

   (d) Determinare h affinché $\boldsymbol{v}$ appartenga a U:

   (e) Per il valore di h trovato, calcolare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2h-2 & 6 & 4 \\ 3 & h-1 & 2 \\ 2h+1 & h+5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ h^2-4h+12 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ x+y+2z \\ 2x-y+3z \\ -x+2y-z \end{pmatrix}$ e sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $z + 3y = 0$.

   (a) Determinare la matrice A associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

   (b) Determinare dimensione e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare dimensione e equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

   (d) Determinare $\dim(\ker L \cap U)$ e $\dim(\ker L + U)$

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Stabilire quali tra i seguenti vettori sono autovettori di A ed in caso affermativo determinare l'autovalore associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

   (b) Determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

   (c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi:

   (d) Stabilire se A è diagonalizzabile.

---

4. Si consideri il sottospazio di $U \subset \mathbb{R}^4$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale h:

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1-h \\ -h \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

   (a) Trovare una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

   (b) Completare la base trovata ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$:

   (c) Determinare una base di $U^\perp$:

   (d) Determinare h affinché $\boldsymbol{v}$ appartenga a U:

   (e) Per il valore di h trovato, calcolare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 gennaio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2h-2 & 6 & 4h-4 \\ 3 & h-1 & 6 \\ 2h-5 & 7-h & 4h-10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ h^2+2h-12 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y+z-t \\ -x+y-2z+2t \\ 2x+y+z-t \end{pmatrix}$ e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $z + y = t = 0$.

   (a) Determinare la matrice A associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

   (b) Determinare dimensione e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare dimensione e equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

   (d) Determinare $\dim(\ker L \cap U)$ e $\dim(\ker L + U)$.

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire quali tra i seguenti vettori sono autovettori di A ed in caso affermativo determinare l'autovalore associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; X_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi:

(d) Stabilire se A è diagonalizzabile.

---

4. Si consideri il sottospazio di $U \subset \mathbb{R}^4$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale h:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1-h \\ h \end{pmatrix}.$$

(a) Trovare una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

(b) Completare la base trovata ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$:

(c) Determinare una base di $U^{\perp}$:

(d) Determinare h affinché $\boldsymbol{v}$ appartenga a U:

(e) Per il valore di h trovato, calcolare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:
