CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 febbraio 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Fornire la definizione di applicazione lineare $L\colon V \to W$ fra due spazi vettoriali generici. Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V; mostrare che $\{L(\boldsymbol{v}_1), \dots, L(\boldsymbol{v}_n)\}$ sono una lista di generatori di $\operatorname{Im} L$.

B. Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V. Definire l'insieme $U + W$ e mostrare che è un sottospazio vettoriale di V.

---

1. Dire se una matrice può essere diagonalizzabile, ma non invertibile, fornendo un esempio in caso affermativo (motivare la risposta).

---

2. Indicare se ciascuna delle seguenti matrici è diagonale (D) e/o invertibile (GL):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Indicare con $\otimes$ le matrici simili ad A fra le seguenti:

$\bigcirc \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

4. Siano X_1 e X_2 soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) $X_1 + X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = 2B$. sì ◯ no ◯

   (b) $X_1 - 2X_2 \in \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯

   (c) Esiste un vettore $Y \in \operatorname{Ker} A$ tale che $X_2 = X_1 + Y$. sì ◯ no ◯

   (d) Necessariamente $X_1 = X_2$. sì ◯ no ◯

---

5. Sia $W = \{X \in \mathbb{R}^5 \,|\, 2x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$. Determinare $\dim W$ e proporne una base.

---

6. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono sistemi di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

---

7. Stabilire se esiste un'applicazione lineare iniettiva $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, motivando la risposta.

---

8. Sia A una matrice reale simmetrica 3×3. Sapendo che gli autovalori reali di A sono solo $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 4$, e che $V_3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,|\, x + 2y = 0\}$, determinare una rappresentazione cartesiana di V_4.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 febbraio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Fissato in $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard, fornire la definizione di sistema ortogonale di vettori e mostrare che i vettori di un sistema ortogonale sono necessariamente linearmente indipendenti.

B. Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V. Definire l'insieme $U \cap W$ e mostrare che è un sottospazio vettoriale di V.

---

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Indicare con $\otimes$ le matrici simili ad A fra le seguenti:

$\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

---

2. Indicare se ciascuna delle seguenti matrici è ortogonale (O) e/o simmetrica (S):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

3. Dire se una matrice reale può essere simmetrica, ma non invertibile, fornendo un esempio in caso affermativo (motivare la risposta).

---

4. Siano X_1 e X_2 soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) Se $X_1 \neq X_2$, allora necessariamente esistono infinite soluzioni del sistema $A\,X = B$. sì ◯ no ◯

   (b) $X_1 - X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = B$. sì ◯ no ◯

   (c) $X_1 - X_2 \in \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯

   (d) Se le colonne di A sono linearmente indipendenti allora $X_1 = X_2$. sì ◯ no ◯

---

5. Sia $W = \left\{X \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = x_4 - x_5\right\}$. Determinare $\dim W$ e proporne una base.

---

6. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$. sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$; sì ◯ no ◯

---

7. Sia A una matrice reale simmetrica 3×3. Sapendo che gli autovalori reali di A sono solo $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, e che $V_2 = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,|\, x - y = x + z = 0\}$, determinare una rappresentazione cartesiana di V_{-3}.

---

8. Stabilire se esiste un'applicazione lineare suriettiva $L\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, motivando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 febbraio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Definire l'invertibilità di una matrice $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ e mostrare che, se una matrice quadrata $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ è invertibile, le sue colonne formano una base di $\mathbb{R}^n$.

B. Fissato il prodotto scalare standard nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, e dato in esso un sottospazio vettoriale $S \subset \mathbb{R}^n$ definire l'insieme ortogonale $S^\perp$; mostrare che $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

---

1. Dire se una matrice può essere ortogonale e non diagonalizzabile, fornendo un esempio in caso affermativo (motivare la risposta).

---

2. Indicare se ciascuna delle seguenti matrici è ortogonale (O) e/o diagonale (D):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

---

3. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Indicare con $\otimes$ le matrici simili ad A fra le seguenti:

$\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

---

4. Siano X_1 e X_2 soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) $X_1 - X_2$ è soluzione di $A\,X = \mathbf{0}$. sì ◯ no ◯

   (b) $3X_1$ è soluzione del sistema $A\,X = 3B$. sì ◯ no ◯

   (c) $X_1 + t(X_2 - X_1)$ è soluzione del sistema $A\,X = B$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. sì ◯ no ◯

   (d) Se la matrice A invertibile allora $X_1 = X_2$. sì ◯ no ◯

---

5. Sia $W = \{X \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 + 2x_2 = x_3 - x_4 = 0\}$. Determinare $\dim W$ e proporne una base.

---

6. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono sistemi di generatori di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

---

7. Stabilire se esiste un'applicazione lineare iniettiva $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, motivando la risposta.

---

8. Sia A una matrice reale simmetrica 3×3. Sapendo che gli autovalori reali di A sono solo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$, e che $V_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,|\, y - 2z = 0\}$, determinare una rappresentazione cartesiana di V_5.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V. Definire l'insieme $U \cap W$ e mostrare che è un sottospazio vettoriale di V.

B. Fissato in $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard, fornire la definizione di sistema ortogonale di vettori e mostrare che i vettori di un sistema ortogonale sono necessariamente linearmente indipendenti.

---

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Indicare con $\otimes$ le matrici simili ad A fra le seguenti:

$\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

---

2. Dire se una matrice reale può essere invertibile, ma non diagonalizzabile, fornendo un esempio in caso affermativo (motivare la risposta).

---

3. Indicare se ciascuna delle seguenti matrici è invertibile (GL) e/o simmetrica (S):

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Sia A una matrice reale simmetrica 3×3. Sapendo che gli autovalori reali di A sono solo $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = 2$, e che $V_{-5} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y = y - z = 0 \}$, determinare una rappresentazione cartesiana di V_2.

---

5. Sia $W = \{ X \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_1 + x_5 \}$. Determinare $\dim W$ e proporne una base.

---

6. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. sì ◯ no ◯

---

7. Siano X_1 e X_2 soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) X_1 e X_2 sono necessariamente dipendenti. sì ◯ no ◯

   (b) $X_1 + 2X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = 3B$. sì ◯ no ◯

   (c) $X_2 - X_1 \in \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯

   (d) Necessariamente $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B)$. sì ◯ no ◯

---

8. Stabilire se esiste un'applicazione lineare suriettiva $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, motivando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 febbraio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Fissato il prodotto scalare standard nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, e dato in esso un sottospazio vettoriale $S \subset \mathbb{R}^n$ definire l'insieme ortogonale $S^\perp$; mostrare che $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

B. Definire l'invertibilità di una matrice $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ e mostrare che, se una matrice quadrata $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ è invertibile, le sue colonne formano una base di $\mathbb{R}^n$.

---

1. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono sistemi di generatori di $\mathbb{R}^3$:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$ sì ◯ no ◯

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\};$ sì ◯ no ◯

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$ sì ◯ no ◯

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$ sì ◯ no ◯

---

2. Dire se una matrice può essere simmetrica e non diagonalizzabile, fornendo un esempio in caso affermativo (motivare la risposta).

---

3. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Indicare con $\otimes$ le matrici simili ad A fra le seguenti:

$\bigcirc \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

---

4. Indicare se ciascuna delle seguenti matrici è diagonale (D) e/o ortogonale (O):

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

5. Siano X_1 e X_2 soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) Se la matrice A è quadrata e invertibile, allora $X_1 = X_2$. sì $\bigcirc$ no $\bigcirc$

   (b) Esiste un vettore $Y \in \operatorname{Ker} A$ tale che $X_2 = X_1 + Y$. sì $\bigcirc$ no $\bigcirc$

   (c) $X_1 - X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = \mathbf{0}$. sì $\bigcirc$ no $\bigcirc$

   (d) $X_1 + X_2$ è soluzione di $A\,X = B$. sì $\bigcirc$ no $\bigcirc$

---

6. Sia $W = \left\{ X \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = 2x_3 + x_5 = 0 \right\}$. Determinare $\dim W$ e proporne una base.

---

7. Stabilire se esiste un'applicazione lineare iniettiva $L\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, motivando la risposta.

---

8. Sia A una matrice reale simmetrica 3×3. Sapendo che gli autovalori reali di A sono solo $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$, e che $V_4 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x + z = 0 \}$, determinare una rappresentazione cartesiana di V_{-3}.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V. Definire l'insieme $U + W$ e mostrare che è un sottospazio vettoriale di V.

B. Fornire la definizione di applicazione lineare $L\colon V \to W$ fra due spazi vettoriali generici. Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V; mostrare che $\{L(\boldsymbol{v}_1), \dots, L(\boldsymbol{v}_n)\}$ sono una lista di generatori di $\operatorname{Im} L$.

---

1. Siano X_1 e X_2 soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) Esiste un vettore $Y \in \operatorname{Ker} A$ tale che $X_1 - X_2 = Y$. sì ◯ no ◯

   (b) $X_1 - 2X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = -B$. sì ◯ no ◯

   (c) $X_1 + X_2 \in \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯

   (d) Se $\operatorname{rg}(A)$ è uguale al numero delle colonne di A, allora $X_1 = X_2$. sì ◯ no ◯

---

2. Dire se una matrice può essere diagonalizzabile e ortogonale, fornendo un esempio in caso affermativo (motivare la risposta).

---

3. Sia $W = \left\{X \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - 2x_2 = x_3 + 2x_4 = x_2 + x_5 0\right\}$. Determinare $\dim W$ e proporne una base.

---

4. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$; sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. sì ◯ no ◯

---

5. Indicare se ciascuna delle seguenti matrici è simmetrica (S) e/o invertibile (GL):

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 3\\3 & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

---

6. Sia $A = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$. Indicare con $\otimes$ le matrici simili ad A fra le seguenti:

◯ $\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

---

7. Stabilire se esiste un'applicazione lineare suriettiva $L\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, motivando la risposta.

---

8. Sia A una matrice reale simmetrica 3×3. Sapendo che gli autovalori reali di A sono solo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$, e che $V_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,|\, x - 2y = z + 2y = 0\right\}$, determinare una rappresentazione cartesiana di V_6.
