CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 febbraio 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Sia $A = \begin{pmatrix} h-1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & h & 1+h & 1 \\ 1 & h & -1 & -(1+h) \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ha soluzione:

   (c) Posto $h = 3$ determinare la soluzione generale del sistema $AX = B$:

   (d) Posto $h = 0$ fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta s di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$.
   Determinare:

   (a) La direzione della retta r passante per A e B:

   (b) il punto P di intersezione delle rette r e s:

   (c) l'equazione del piano π contenente le rette r e s:

   (d) le equazioni cartesiane della retta n passante per P e perpendicolare a π:

   (e) la distanza del piano π dall'origine O:

---

3. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice reale simmetrica di ordine 3:

$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$, con $X \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche:

(b) Determinare le equazioni degli autospazi e trovarne una base:

(c) Determinare il segno di Q.

(d) Determinare una matrice ortogonale M tale che il cambio di coordinate $X = MX'$ porta Q a forma canonica:

---

4. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro reale h:

$$U_h = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+h \\ 1-h \\ h \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_h = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h \\ h \end{pmatrix} \}.$$

(a) Determinare la dimensione di U_h al variare di h:

(b) Determinare la dimensione di $U_h + V_h$ al variare di h:

(c) Determinare la dimensione e le equazioni cartesiane del sottospazio $V_h^{\perp}$:

(d) Posto $h = 1$, trovare una base ortogonale per U_h:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Sia $A = \begin{pmatrix} h-2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & h-1 & h & -1 \\ 1 & h-1 & -1 & h \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ha soluzione:

   (c) Posto $h = 2$ determinare la soluzione generale del sistema $AX = B$:

   (d) Posto $h = 0$ fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta s di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$.
   Determinare:

   (a) La direzione della retta r passante per A e B:

   (b) il punto P di intersezione delle rette r e s:

   (c) l'equazione del piano π contenente le rette r e s:

   (d) le equazioni cartesiane della retta n passante per P e perpendicolare a π:

   (e) la distanza del piano π dall'origine O:

---

3. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice reale simmetrica di ordine 3:
$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ e la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$, con $X \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche:

   (b) Determinare le equazioni degli autospazi e trovarne una base:

   (c) Determinare il segno di Q.

   (d) Determinare una matrice ortogonale M tale che il cambio di coordinate $X = MX'$ porta Q a forma canonica:

---

4. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro reale h:

$$U_h = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+h \\ 1-h \\ 2h-2 \\ 1+h \end{pmatrix} \right\}, \quad V_h = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ h \\ h \end{pmatrix} \}.$$

   (a) Determinare la dimensione di U_h al variare di h:

   (b) Determinare la dimensione di $U_h + V_h$ al variare di h:

   (c) Determinare la dimensione e le equazioni cartesiane del sottospazio $V_h^{\perp}$:

   (d) Posto $h = 0$, trovare una base ortogonale per U_h:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+h & 2h \\ -(2+h) & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -h & 1+h & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ha soluzione:

   (c) Posto $h = 1$ determinare la soluzione generale del sistema $AX = B$:

   (d) Posto $h = -1$ fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la retta s di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$.
   Determinare:

   (a) La direzione della retta r passante per A e B:

   (b) il punto P di intersezione delle rette r e s:

   (c) l'equazione del piano π contenente le rette r e s:

   (d) le equazioni cartesiane della retta n passante per P e perpendicolare a π:

   (e) la distanza del piano π dall'origine O:

---

3. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice reale simmetrica di ordine 3:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ e la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$, con $X \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche:

(b) Determinare le equazioni degli autospazi e trovarne una base:

(c) Determinare il segno di Q.

(d) Determinare una matrice ortogonale M tale che il cambio di coordinate $X = MX'$ porta Q a forma canonica:

---

4. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro reale h:

$$U_h = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h \\ 2+h \\ -h-1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_h = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2h-2 \\ -2h-2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Determinare la dimensione di U_h al variare di h:

(b) Determinare la dimensione di $U_h + V_h$ al variare di h:

(c) Determinare la dimensione e le equazioni cartesiane del sottospazio $V_h^{\perp}$:

(d) Posto $h = -2$, trovare una base ortogonale per U_h:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2h & h-1 \\ -1 & 1-h & -2h & 1 \\ -1-h & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ha soluzione:

   (c) Posto $h = -1$ determinare la soluzione generale del sistema $AX = B$:

   (d) Posto $h = 1$ fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e la retta s di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$.
   Determinare:

   (a) La direzione della retta r passante per A e B:

   (b) il punto P di intersezione delle rette r e s:

   (c) l'equazione del piano π contenente le rette r e s:

   (d) le equazioni cartesiane della retta n passante per P e perpendicolare a π:

   (e) la distanza del piano π dall'origine O:

---

3. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice reale simmetrica di ordine 3:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$, con $X \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche:

   (b) Determinare le equazioni degli autospazi e trovarne una base:

   (c) Determinare il segno di Q.

   (d) Determinare una matrice ortogonale M tale che il cambio di coordinate $X = MX'$ porta Q a forma canonica:

---

4. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro reale h:

$$U_h = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ -2-h \\ 4+2h \\ h \end{pmatrix} \right\}, \quad V_h = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1+h \\ h \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Determinare la dimensione di U_h al variare di h:

   (b) Determinare la dimensione di $U_h + V_h$ al variare di h:

   (c) Determinare la dimensione e le equazioni cartesiane del sottospazio $V_h^{\perp}$:

   (d) Posto $h = 0$, trovare una base ortogonale per U_h:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Sia $A = \begin{pmatrix} h-2 & -2 & h & 4 \\ 0 & h-4 & 2 & 4 \\ h-2 & 2 & -2 & -2h \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ha soluzione:

   (c) Posto $h = 4$ determinare la soluzione generale del sistema $AX = B$:

   (d) Posto $h = 2$ fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la retta s di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$.
   Determinare:

   (a) La direzione della retta r passante per A e B:

   (b) il punto P di intersezione delle rette r e s:

   (c) l'equazione del piano π contenente le rette r e s:

   (d) le equazioni cartesiane della retta n passante per P e perpendicolare a π:

   (e) la distanza del piano π dall'origine O:

---

3. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice reale simmetrica di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -4 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ e la forma quadratica } Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX, \text{ con } X \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche:

   (b) Determinare le equazioni degli autospazi e trovarne una base:

   (c) Determinare il segno di Q.

   (d) Determinare una matrice ortogonale M tale che il cambio di coordinate $X = MX'$ porta Q a forma canonica:

---

4. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro reale h:

$$U_h = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-h \\ 2+h \\ 1+h \end{pmatrix} \right\}, \quad V_h = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} h \\ -1 \\ 2h \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Determinare la dimensione di U_h al variare di h:

   (b) Determinare la dimensione di $U_h + V_h$ al variare di h:

   (c) Determinare la dimensione e le equazioni cartesiane del sottospazio $V_h^{\perp}$:

   (d) Posto $h = 1$, trovare una base ortogonale per U_h:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 febbraio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 2h-1 & 1 & -2h \\ 2h & 2h-1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2h-2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ha soluzione:

   (c) Posto $h = 2$ determinare la soluzione generale del sistema $AX = B$:

   (d) Posto $h = 0$ fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la retta s di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$.
Determinare:

   (a) La direzione della retta r passante per A e B:

   (b) il punto P di intersezione delle rette r e s:

   (c) l'equazione del piano π contenente le rette r e s:

   (d) le equazioni cartesiane della retta n passante per P e perpendicolare a π:

   (e) la distanza del piano π dall'origine O:

---

3. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice reale simmetrica di ordine 3:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$, con $X \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche:

   (b) Determinare le equazioni degli autospazi e trovarne una base:

   (c) Determinare il segno di Q.

   (d) Determinare una matrice ortogonale M tale che il cambio di coordinate $X = MX'$ porta Q a forma canonica:

---

4. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro reale h:

$$U_h = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 2-h \\ 4-2h \\ -h \end{pmatrix}\right\}, \quad V_h = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} h-1 \\ -1 \\ 1-h \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

   (a) Determinare la dimensione di U_h al variare di h:

   (b) Determinare la dimensione di $U_h + V_h$ al variare di h:

   (c) Determinare la dimensione e le equazioni cartesiane del sottospazio $V_h^{\perp}$:

   (d) Posto $h = 0$, trovare una base ortogonale per U_h:
