CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 febbraio 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,...$\boldsymbol{v}_n$ vettori di V. Definire l'insieme $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, .., \boldsymbol{v}_n)$ e dimostrare che è un *sottospazio* di V.

B. Sia A una matrice $n \times n$. Enunciare la definizione di *autovettore* di A. Dimostrare che A ammette l'autovalore 0 se e solo se le sue colonne sono *lin. dipendenti.*

---

1. Stabilire, motivando la risposta, se esiste un'applicazione *lineare* $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{Ker} L$ abbia equazioni $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$.

---

2. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono *autovettori* della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, in caso affermativo determinare l'*autovalore* associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

---

3. Enunciare il criterio dei *minori* per il calcolo del rango di una matrice A $k \times n$.

---

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Utilizzando le proprietà del *determinante*, calcolare:

$$\det(A^3) = \qquad \det(-\frac{1}{2}A) = \qquad \det(-A^{\mathrm{T}}) = \qquad \det(A^{-2}) =$$

---

5. Sia V l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *non omogeneo* $AX = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere.

(a) se le colonne di A sono *lin. indipendenti* allora $V = \{\mathbf{0}\}$. sì ◯ no ◯

(b) se $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A|B)$ allora non esistono soluzioni . sì ◯ no ◯

(c) se $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|B)$, allora $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, A$. sì ◯ no ◯

(d) se $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|B) = r$, allora V ha dimensione r. sì ◯ no ◯

---

6. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Determinare una base di $V^\perp$. Esiste un sottospazio $U \neq V^\perp$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.

---

7. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

(a) Due rette *non parallele* nello spazio si intersecano sempre. sì ◯ no ◯

(b) L'equazione $x + y + z = 1$ descrive una retta che non passa per l'origine. sì ◯ no ◯

(c) Il piano di eq. $x+2y+z = 3$ è *ortogonale* alla retta di eq. $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

sì ◯ no ◯

(d) Il piano di eq. $x + 2y + z = 3$ è *ortogonale* alla retta di eq. $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

sì ◯ no ◯

---

8. Siano A e B due matrici quadrate *invertibili*. Stabilire se il prodotto AB e la somma $A + B$ sono *sempre* matrici invertibili. Motivare la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 febbraio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Definire l'insieme $\operatorname{Ker} L$ e dimostrare che è un *sottospazio* di V.

B. Enunciare la definizione di *matrice diagonalizzabile*. Dimostrare che, se una matrice $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ è diagonalizzabile, allora la somma delle molteplicità algebriche del suo polinomio caratteristico è n.

---

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Utlizzando le proprietà del *determinante*, calcolare:

$$\det(3A) = \qquad \det(-A^2) = \qquad \det(A^{-1}) = \qquad \det(A^{\mathrm{T}}) =$$

---

2. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono *autovettori* della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, in caso affermativo determinare l'*autovalore* associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

3. Stabilire, motivando la risposta, se esiste un'applicazione *lineare* $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{Ker} L$ abbia equazioni $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

---

4. Definire il *prodotto scalare* in $\mathbb{R}^n$ e enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

---

5. Siano A e B due matrici quadrate *simmetriche*. Stabilire se la somma $A + B$ è *sempre* una matrice simmetrica. Motivare la risposta.

---

6. Sia V l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *omogeneo* $A\,X = \mathbf{0}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere.

   (a) se le colonne di A sono *lin. indipendenti* allora $V = \{\mathbf{0}\}$. sì ◯ no ◯

   (b) se $\operatorname{rg}(A) = r$ allora V ha dimensione r. sì ◯ no ◯

   (c) $V = \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯

   (d) se A è *invertibile*, allora non esistono soluzioni. sì ◯ no ◯

---

7. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

   (a) Due piani *non paralleli* nello spazio si intersecano sempre. sì ◯ no ◯

   (b) Il piano di eq. $x + 2y + z = 3$ è *parallelo* alla retta di eq. $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.
   sì ◯ no ◯

   (c) L'equazione $x+y+z = 0$ descrive una retta che passa per l'origine. sì ◯ no ◯

   (d) Il piano di eq. $x + 2y + z = 3$ è *ortogonale* alla retta di eq. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.
   sì ◯ no ◯

---

8. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x - y + 3z = 0$. Determinare una base di $V^\perp$. Esiste un sottospazio $U \neq V^\perp$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 febbraio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Definire l'insieme $\operatorname{Im} L$ e dimostrare che è un *sottospazio* di W.

B. Sia A una matrice $n \times n$. Enunciare la definizione di matrice *invertibile*. Dimostrare che se A è invertibile si ha $\det A \neq 0$.

---

1. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazioni $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$. Determinare una base di $V^\perp$. Esiste un sottospazio $U \neq V^\perp$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.

---

2. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono *autovettori* della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, in caso affermativo determinare l'*autovalore* associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Utilizzando le proprietà del *determinante*, calcolare:

$$\det(A^4) = \qquad \det(-3A) = \qquad \det(A^{-2}) = \qquad \det(-A^{\mathrm{T}}) =$$

---

4. Stabilire, motivando la risposta, se esiste un'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Ker} L$ abbia equazioni $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

---

5. Sia V l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *non omogeneo* $A\,X = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere.

   (a) se $\dim V = 0$ allora le colonne di A sono *lin. indipendenti.* sì ◯ no ◯

   (b) se esistono soluzioni allora $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B)$. sì ◯ no ◯

   (c) se esistono soluzioni allora $\dim V = \dim \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯

   (d) se $\operatorname{rg}(A) = r$ allora V ha dimensione r. sì ◯ no ◯

---

6. Enunciare il Teorema *spettrale.*

---

7. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

   (a) Un piano ed una retta nello spazio si intersecano *sempre.* sì ◯ no ◯

   (b) La retta di eq. $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ è *parallela* alla retta di eq. $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$.
   sì ◯ no ◯

   (c) Il piano di eq. $x - 2y + z = 3$ è *ortogonale* alla retta di eq. $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.
   sì ◯ no ◯

   (d) L'equazione $x + 2y + 3z = 2$ descrive un piano che *non* passa per l'origine.
   sì ◯ no ◯

---

8. Siano A e B due matrici quadrate *ortogonali.* Stabilire se il prodotto AB è *sempre* una matrice ortogonale. Motivare la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 febbraio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Enunciare la definizione di *matrice diagonalizzabile*. Dimostrare che, se una matrice $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ è diagonalizzabile, allora la somma delle molteplicità algebriche del suo polinomio caratteristico è n.

B. Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,...$\boldsymbol{v}_n$ vettori di V. Definire l'insieme $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, .., \boldsymbol{v}_n)$ e dimostrare che è un *sottospazio* di V.

---

1. Siano A e B due matrici quadrate *invertibili.* Stabilire se il prodotto AB e la somma $A+B$ sono *sempre* matrici invertibili. Motivare la risposta.

---

2. Stabilire, motivando la risposta, se esiste un'applicazione *lineare* $L\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{Ker} L$ abbia equazioni $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$.

---

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilizzando le proprietà del *determinante*, calcolare:

$$\det(-2A) = \qquad \det(A^3) = \qquad \det(A^{-1}) = \qquad \det(2A^{\mathrm{T}}) =$$

---

4. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono *autovettori* della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

   in caso affermativo determinare l'*autovalore* associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

5. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $2x - y + 3z = 0$. Determinare una base di $V^{\perp}$. Esiste un sottospazio $U \neq V^{\perp}$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.

---

6. Sia V l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *omogeneo* $A\,X = \mathbf{0}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere.

   (a) $V = \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯
   (b) se le colonne di A sono *lin. dipendenti* allora $\dim V = 0$. sì ◯ no ◯
   (c) se $V = \{\mathbf{0}\}$ allora le colonne di A sono *lin. indipendenti*. sì ◯ no ◯
   (d) se $\operatorname{rg}(A) = r$ allora $\dim V = r$. sì ◯ no ◯

---

7. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

   (a) Due rette *parallele* nello spazio sono complanari. sì ◯ no ◯
   (b) L'equazione $x - y + z = 4$ descrive una retta che non passa per l'origine.
   sì ◯ no ◯
   (c) Il piano di eq. $x - 2y + z = 3$ è *parallelo* al piano di eq. $2y - x - z = 1$.
   sì ◯ no ◯
   (d) Il piano di eq. $x - 2y + z = 3$ è *parallelo* alla retta di eq. $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ x - z = 3 \end{cases}$.
   sì ◯ no ◯

---

8. Enunciare il criterio dei *minori* per il calcolo del rango di una matrice A $k \times n$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 febbraio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Sia A una matrice $n \times n$. Enunciare la definizione di *autovettore* di A. Dimostrare che A ammette l'autovalore 0 se e solo se le sue colonne sono *lin. dipendenti.*

B. Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Definire l'insieme $\operatorname{Im} L$ e dimostrare che è un *sottospazio* di W.

---

1. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

   (a) L'equazione $x - y + 2z = 4$ descrive un piano che passa per l'origine. sì ◯ no ◯

   (b) Due rette *non parallele* nello spazio si intersecano *sempre*. sì ◯ no ◯

   (c) Il piano di eq. $2x-y+z=1$ è *perpendicolare* alla retta di eq. $\begin{cases} x+2y=0 \\ y+z=1 \end{cases}$.

   sì ◯ no ◯

   (d) Il piano di eq. $2x-y+z=1$ è *perpendicolare* alla retta di eq. $\begin{cases} y=2 \\ x+z=0 \end{cases}$.

   sì ◯ no ◯

---

2. Definire il *prodotto scalare* in $\mathbb{R}^n$ e enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

---

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Utilizzando le proprietà del *determinante*, calcolare:

$$\det(A^3) = \qquad \det(-4A) = \qquad \det(A^{-2}) = \qquad \det(-A^{\mathrm{T}}) =$$

---

4. Siano A e B due matrici quadrate *simmetriche*. Stabilire se la somma $A+B$ è *sempre* una matrice simmetrica. Motivare la risposta.

---

5. Stabilire, motivando la risposta, se esiste un'applicazione *lineare* $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Ker} L$ abbia equazione $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

---

6. Sia V l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *non omogeneo* $A\,X = B$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere.

   (a) $V = \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯

   (b) se A è *invertibile* allora $\dim V = 0$. sì ◯ no ◯

   (c) se $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B)$ allora $\dim V = \dim \operatorname{Ker} A$. sì ◯ no ◯

   (d) se $\operatorname{rg}(A) = r$ allora $\dim V = r$. sì ◯ no ◯

---

7. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono *autovettori* della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, in caso affermativo determinare l'*autovalore* associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

8. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$. Determinare una base di $V^\perp$. Esiste un sottospazio $U \neq V^\perp$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 febbraio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Sia A una matrice $n \times n$. Enunciare la definizione di matrice *invertibile*. Dimostrare che se A è invertibile si ha $\det A \neq 0$.

B. Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Definire l'insieme $\operatorname{Ker} L$ e dimostrare che è un *sottospazio* di V.

---

1. Siano A e B due matrici quadrate *ortogonali*. Stabilire se il prodotto AB è *sempre* una matrice ortogonale. Motivare la risposta.

---

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilizzando le proprietà del *determinante*, calcolare:

$$\det(-\frac{1}{2}A) = \qquad \det(A^4) = \qquad \det(-A^{-1}) = \qquad \det(A^{\mathrm{T}}.A) =$$

---

3. Stabilire, motivando la risposta, se esiste un'applicazione *lineare* $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{Ker} L$ abbia equazione $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

---

4. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

   (a) Il piano di eq. $x - 2y + z = 4$ è *parallelo* alla retta di eq. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

   sì ◯ no ◯

   (b) L'equazione $3x - y + z = 2$ descrive una retta che *non* passa per l'origine.

   sì ◯ no ◯

   (c) Due piani *non paralleli* nello spazio si intersecano *sempre*. sì ◯ no ◯

   (d) La retta di eq. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ è *parallela* alla retta di eq. $\begin{cases} y = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$.

   sì ◯ no ◯

---

5. Enunciare il Teorema *spettrale*.

---

6. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono *autovettori* della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

   in caso affermativo determinare l'*autovalore* associato:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

7. Sia V l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *omogeneo* $A\,X = \mathbf{0}$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere.

   (a) se le colonne di A sono *lin. dipendenti* allora $\dim V > 0$. sì ◯ no ◯

   (b) se $\mathrm{rg}(A) = r$ allora V ha dimensione r. sì ◯ no ◯

   (c) $V = \mathrm{Ker}\, A$. sì ◯ no ◯

   (d) se le colonne di A sono *lin. indipendenti* allora non esistono soluzioni.

   sì ◯ no ◯

---

8. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x - 2y + 3z = 0$. Determinare una base di $V^\perp$. Esiste un sottospazio $U \neq V^\perp$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.
