CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 giugno 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Sia A una matrice $k \times n$ e $AX = \mathbf{0}$ il sistema lineare **omogeneo** associato. Dimostrare che l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Come si calcola la sua dimensione?

B. Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Dimostrare che L è **iniettiva** se e solo se $\dim \operatorname{Ker} L = 0$.

---

1. *Definire* il rango di una matrice A di ordine $k \times n$.

---

2. Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano un piano nello spazio:

(a) $\begin{cases} x - y = 2 \end{cases}$ sì ◯ no ◯ (b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(c) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$ sì ◯ no ◯ (d) $\begin{cases} z = 2 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

---

3. Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$. Sia X il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determini X.

---

4. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire se le seguenti liste completano S a una *base* di $\mathbb{R}^3$.

   $(a) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯ $(b) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

   $(c) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯ $(d) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

---

5. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Dire se le seguenti affermazioni sono **sempre** vere oppure no:
   (a) $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}) \subset \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$; sì ◯ no ◯
   (b) $\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v}_1$ per un dato $\alpha \in \mathbb{R}$; sì ◯ no ◯
   (c) $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) < \dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u})$; sì ◯ no ◯
   (d) $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u})$. sì ◯ no ◯

---

6. Indicare quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili:

   ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

---

7. Stabilire se le seguenti applicazioni sono lineari:
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2y \\ x \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x-y \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

---

8. *Definire* il concetto di autovettore di un operatore lineare $L\colon V \to V$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 giugno 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Siano A una matrice $k \times n$ e $B \in \mathbb{R}^k$ non nullo. Enunciare e dimostrare il Teorema di Rouché-Capelli per il sistema lineare $AX = B$.

B. Siano A e B matrici quadrate di ordine n. Dimostrare che se A e B sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

---

1. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire se le seguenti liste unite a S *generano* $\mathbb{R}^3$.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

---

2. Fornire la *definizione* di sottospazio U di uno spazio vettoriale reale V.

---

3. Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$. Sia X il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determini X.

---

4. Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano una retta nello spazio:

$(a)\ \begin{cases} x+y=1 \end{cases}$ sì ◯ no ◯ $\quad (b)\ \begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

$(c)\ \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-6y+3z=3 \end{cases}$ sì ◯ no ◯ $\quad (d)\ \begin{cases} z=2 \\ x=1 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

---

5. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $\boldsymbol{u} \in V$, con $\boldsymbol{u} \notin \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$. Dire se le seguenti affermazioni sono **sempre** vere oppure no:

   (a) $\operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1) \subset \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$; sì ◯ no ◯

   (b) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}$ sono linearmente indipendenti; sì ◯ no ◯

   (c) $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) < \dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u})$; sì ◯ no ◯

   (d) $\operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1) + \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_2)$. sì ◯ no ◯

---

6. Indicare quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili:

◯ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

---

7. Fornire la *definizione* di autovalore di un operatore lineare $L\colon V \to V$.

---

8. Stabilire se le seguenti applicazioni sono lineari:

   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x+3y \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ -y \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 giugno 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Definire l'insieme $U+W$ e dimostrare che è un sottospazio di V.

B. Sia A una matrice $n \times n$, dimostrare che $\alpha \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A se e solo se $\det(A - \alpha I_n) = 0$.

---

1. Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano un piano nello spazio:

(a) $\begin{cases} x = 2 \end{cases}$ sì ◯ no ◯ (b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(c) $\begin{cases} x + y = 0 \end{cases}$ sì ◯ no ◯ (d) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

---

2. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire se le seguenti liste completano S a una base di $\mathbb{R}^3$.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

---

3. Fornire la *definizione* di matrice ortogonale di ordine n.

---

4. Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$. Sia X il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si determini X.

---

5. Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. Dire se le seguenti affermazioni sono **sempre** vere oppure no:

   (a) $2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \sqrt{3}\boldsymbol{u}_3 \in U$; sì ◯ no ◯

   (b) $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \leq \dim U$; sì ◯ no ◯

   (c) Se $\boldsymbol{u}_3 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, necessariamente $\dim U = 2$; sì ◯ no ◯

   (d) $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_3) = U$. sì ◯ no ◯

---

6. Indicare quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili:

◯ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

---

7. Stabilire se le seguenti applicazioni sono lineari:

   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 - y \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + 2y \\ x \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x + y \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
   - $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y + 2 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

---

8. *Definire* il rango di una matrice A di ordine $k \times n$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	22 giugno 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Definire $\operatorname{Im} L$ e dimostrare che è un sottospazio di W.

B. Sia A una matrice invertibile $n \times n$. Dimostrare che le sue colonne sono linearmente indipendenti.

---

1. *Caratterizzare* un sistema (lista) ortogonale di vettori $L = \{u_1, \dots \boldsymbol{u}_k\}$ presi in uno spazio vettoriale V.

---

2. Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. Dire se le seguenti affermazioni sono **sempre** vere oppure no:

   (a) $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \notin U$; sì ◯ no ◯

   (b) $\dim U = 3$; sì ◯ no ◯

   (c) Se $\boldsymbol{u}_3 \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, allora $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$; sì ◯ no ◯

   (d) $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \subset U$. sì ◯ no ◯

---

3. Indicare quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili:

◯ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

---

4. Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano una retta nello spazio:

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \end{cases}$ sì ◯ no ◯ (b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(c) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$ sì ◯ no ◯ (d) $\begin{cases} y = 3 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

---

5. Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$. Sia X il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determini X.

---

6. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Stabilire se le seguenti liste unite a S *generano* $\mathbb{R}^3$.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

---

7. Stabilire se le seguenti applicazioni sono lineari:

- $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2y \\ x \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
- $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ y \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
- $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x - y^2 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯
- $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

---

8. *Definire* il concetto di autovettore di un operatore lineare $L\colon V \to V$.
