CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 giugno 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Il polinomio caratteristico di A:

(b) Gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

(c) La dimensione e le equazioni cartesiane degli autospazi di A:

(d) Stabilire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una matrice N che diagonalizza A.

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) Le equazioni cartesiane della retta AB:

(b) L'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$:

(c) L'equazione cartesiana del piano π contenente O, A e B:

(d) La distanza del punto Q da π:

(e) La proiezione ortogonale di Q su π:

---

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix} \right\} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-h \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$ al variare del parametro reale h:

(b) Determinare per quali valori di h la lista di vettori $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$:

(c) Determinare per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$:

(d) Posto $h = 2$, determinare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 - 3y^2 - 8xy.$$

Determinare:

(a) L' espressione matriciale di q:

(b) La forma canonica di $q(x', y') =$:

(c) La matrice O ortogonale che realizza il cambio di base $X' = OX$:

(d) Stabilire se esiste un vettore non nullo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $q(\boldsymbol{v}) = 0$ ed in caso affermativo determinare $\boldsymbol{v}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 giugno 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Il polinomio caratteristico di A:

(b) Gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

(c) La dimensione e le equazioni cartesiane degli autospazi di A:

(d) Stabilire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una matrice N che diagonalizza A.

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) Le equazioni cartesiane della retta AB;

(b) L'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

(c) L'equazione cartesiana del piano π contenente O, A e B.

(d) La distanza del punto Q da π.

(e) La proiezione ortogonale di Q su π:

---

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$ al variare del parametro reale k:

(b) Determinare per quali valori di k la lista di vettori $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$:

(c) Determinare per quali valori di k il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$:

(d) Posto $k = 1$, determinare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6x^2 + 9y^2 + 4xy.$$

Determinare:

(a) L' espressione matriciale di q:

(b) La forma canonica di $q(x', y') =$:

(c) La matrice O ortogonale che realizza il cambio di base $X' = OX$:

(d) Stabilire se esiste un vettore non nullo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $q(\boldsymbol{v}) = 0$ ed in caso affermativo determinare $\boldsymbol{v}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	22 giugno 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Il polinomio caratteristico di A:

(b) Gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

(c) La dimensione e le equazioni cartesiane degli autospazi di A:

(d) Stabilire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una matrice N che diagonalizza A.

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) Le equazioni cartesiane della retta AB:

(b) L'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$:

(c) L'equazione cartesiana del piano π contenente O, A e B:

(d) La distanza del punto Q da π:

(e) La proiezione ortogonale di Q su π:

---

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 2h-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2h \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix} \right\} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-h \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$ al variare del parametro reale h:

(b) Determinare per quali valori di h la lista di vettori $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$:

(c) Determinare per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$:

(d) Posto $h = 2$, determinare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -9x^2 - y^2 + 6xy.$$

Determinare:

(a) L' espressione matriciale di q:

(b) La forma canonica di $q(x', y') =$:

(c) La matrice O ortogonale che realizza il cambio di base $X' = OX$:

(d) Stabilire se esiste un vettore non nullo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $q(\boldsymbol{v}) = 0$ ed in caso affermativo determinare $\boldsymbol{v}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 giugno 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Il polinomio caratteristico di A:

(b) Gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

(c) La dimensione e le equazioni cartesiane degli autospazi di A:

(d) Stabilire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una matrice N che diagonalizza A.

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) Le equazioni cartesiane della retta AB;

(b) L'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

(c) L'equazione cartesiana del piano π contenente O, A e B.

(d) La distanza del punto Q da π.

(e) La proiezione ortogonale di Q su π:

---

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2k \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$ al variare del parametro reale k:

(b) Determinare per quali valori di k la lista di vettori $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$:

(c) Determinare per quali valori di k il vettore $\boldsymbol{v}$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$:

(d) Posto $k = -1$, determinare le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3x^2 - 3y^2 + 4xy.$$

Determinare:

(a) L' espressione matriciale di q:

(b) La forma canonica di $q(x', y') =$:

(c) La matrice O ortogonale che realizza il cambio di base $X' = OX$:

(d) Stabilire se esiste un vettore non nullo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $q(\boldsymbol{v}) = 0$ ed in caso affermativo determinare $\boldsymbol{v}$.
