CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 luglio 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Dare la definizione di una funzione $f\colon A \to B$ **generica** iniettiva.

Dimostrare che, se $L\colon V \to W$ è *lineare* e *iniettiva*, allora $\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}_W\}$.

B. Siano $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vettori di uno spazio vettoriale V. Fornire la definizione di $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ come lista di generatori di V.

Dimostrare che, se $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ sono generatori di V, e $\boldsymbol{u}_4 \in V$, allora i vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ *non* sono linearmente indipendenti.

---

1. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ (motivare la risposta).

---

2. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata di ordine 3 con $\det A = -2$. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\det A^5 = \qquad \det(-A) = \qquad \det(3A) = \qquad \det(A^{-1}) =$$

---

3. Sia $AX = B$ un sistema di 5 equazioni in 3 incognite. Posto $\tilde{A} = (A|B)$, supponendo che esista un'unica soluzione, determinare:

$$\operatorname{rg} A = \qquad ; \qquad\qquad \operatorname{rg}(\tilde{A}) = \qquad .$$

---

4. Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare; sia $\operatorname{Im} L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = x - 2y = 0\}$. L è iniettiva? motivare la risposta.

---

5. Si consideri la matrice seguente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se i seguenti vettori sono autovettori di A, ed in caso affermativo calcolare gli autovalori λ corrispondenti:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$. (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$. (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.

---

6. Si consideri la forma quadratica $q(x, y) = x^2 + y^2 + 6xy$.

   Si stabilisca il segno di q.

---

7. Siano U sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, con $\dim U = 3$; $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

   Dire se le seguenti affermazioni sono **sempre** vere oppure no:

   (a) $\dim U^\perp = 2$; sì ◯ no ◯

   (b) se $\dim W = 2$, allora W e U sono in somma diretta; sì ◯ no ◯

   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U^\perp$; sì ◯ no ◯

---

8. Sia A una matrice simmetrica 3×3. Sapendo che 1 e 7 sono autovalori di A e che $V_1 = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare:

   (a) la dimensione dell'autospazio V_7;

   (b) le equazioni dell'autospazio V_7.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 luglio 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Dare la definizione di una funzione $f\colon A \to B$ **generica** suriettiva.

Dimostrare che, se $L\colon V \to W$ è *lineare* e *suriettiva*, e $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{L(\boldsymbol{v}_1), \dots, L(\boldsymbol{v}_n)\}$ è una lista di generatori di W.

B. Siano $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ vettori di uno spazio vettoriale V. Fornire la definizione di $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ come vettori linearmente indipendenti.

Dimostrare che, se $\boldsymbol{u}_3 \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, allora esiste una combinazione lineare non banale di $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ che produce il vettore nullo di V.

---

1. Si consideri la matrice seguente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se i seguenti vettori sono autovettori di A, ed in caso affermativo calcolare gli autovalori λ corrispondenti:

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.
(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.
(d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.

---

2. Si consideri la forma quadratica $q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy$.

Si stabilisca il segno di q.

---

3. Siano U sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, con $\dim U = 2$; $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$. Dire se le seguenti affermazioni sono **sempre** vere oppure no:

   (a) $\dim U^\perp = 4$; sì ◯ no ◯

   (b) se $\dim W = 4$, allora $\dim(W \cap U) \geq 1$; sì ◯ no ◯

   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U^\perp$; sì ◯ no ◯

---

4. Sia A una matrice simmetrica 3×3. Sapendo che 2 e 5 sono autovalori di A e che $V_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, determinare:

   (a) la dimensione dell'autospazio V_5;

   (b) le equazioni dell'autospazio V_5.

---

5. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ (motivare la risposta).

---

6. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata di ordine 3 con $\det A = -3$. Calcolare i seguenti determinanti:

   $\det A^4 =$ $\det(-2A) =$ $\det(3A) =$ $\det(A^{-1}) =$

---

7. Sia $AX = B$ un sistema di 5 equazioni in 3 incognite. Posto $\tilde{A} = (A|B)$, supponendo che esista almeno una soluzione e $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$, determinare:

   $\mathrm{rg}\, A =$; $\mathrm{rg}(\tilde{A}) =$.

---

8. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare; sia $\mathrm{Ker}\, L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = z = 0\}$. L è suriettiva? motivare la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 luglio 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Siano $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ vettori di uno spazio vettoriale V. Fornire la definizione di $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ come lista di generatori di V.

Dimostrare che, se $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ sono linearmente indipendenti, allora $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ *non* sono generatori di V.

B. Dare la definizione di una funzione $f\colon A \to B$ **generica** iniettiva.

Dimostrare che, se $L\colon V \to W$ è *lineare* e *iniettiva*, e $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ è una base di V, allora $\{L(\boldsymbol{v}_1), L(\boldsymbol{v}_2)\}$ sono linearmente indipendenti in W.

---

1. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata di ordine 3 con $\det A = 2$. Calcolare i seguenti determinanti:

$\det A^3 =$ $\quad$ $\det(-3A) =$ $\quad$ $\det(5A) =$ $\quad$ $\det(A^{-1}) =$

---

2. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$. Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ (motivare la risposta).

---

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare; sia $\mathrm{Im}\, L = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y + 3z = 0\}$. L è iniettiva? motivare la risposta.

---

4. Sia $AX = B$ un sistema di 5 equazioni in 4 incognite. Posto $\tilde{A} = (A|B)$, supponendo che esista un'unica soluzione, determinare:

$$\operatorname{rg} A = \qquad ; \qquad\qquad \operatorname{rg}(\tilde{A}) = \qquad .$$

---

5. Si consideri la forma quadratica $q(x, y) = 2xy - x^2 - y^2$.

   Si stabilisca il segno di q.

---

6. Si consideri la matrice seguente: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se i seguenti vettori sono autovettori di A, ed in caso affermativo calcolare gli autovalori λ corrispondenti:

   (a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$. (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.

   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$. (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.

---

7. Sia A una matrice simmetrica 3×3. Sapendo che 1 e 4 sono autovalori di A e che $V_4 = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare:

   (a) la dimensione dell'autospazio V_1;

   (b) una base dell'autospazio V_1.

---

8. Siano U sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, con $\dim U = 4$; $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$. Dire se le seguenti affermazioni sono **sempre** vere oppure no:

   (a) $\dim U^\perp = 4$; sì ◯ no ◯

   (b) se $\dim W = 1$, allora $W \cap U = \{\mathbf{0}\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U^\perp$; sì ◯ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 luglio 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

A. Siano $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vettori di uno spazio vettoriale V. Fornire la definizione di $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ come vettori linearmente indipendenti.

Dimostrare che, se $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ sono linearmente indipendenti, allora i vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ non sono generatori di V.

B. Dare la definizione di una funzione $f\colon A \to B$ **generica** suriettiva.

Dimostrare che, se $L\colon V \to W$ è *lineare* e *non è suriettiva*, e $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ è una base di V, allora $\operatorname{Span}(L(\boldsymbol{v}_1), \ldots, L(\boldsymbol{v}_n)) \neq W$.

---

1. Si consideri la forma quadratica $q(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 4xy$.

Si stabilisca il segno di q.

---

2. Si consideri la matrice seguente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Stabilire se i seguenti vettori sono autovettori di A, ed in caso affermativo calcolare gli autovalori λ corrispondenti:

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$. (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.

(c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$. (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: no ◯ sì ◯, $\lambda =$.

---

3. Sia A una matrice simmetrica 3×3. Sapendo che 3 e 6 sono autovalori di A e che $V_3 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, determinare:

   (a) la dimensione dell'autospazio V_6;

   (b) una base dell'autospazio V_6.

---

4. Siano U sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, con $\dim U = 2$; $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in U$.

   Dire se le seguenti affermazioni sono **sempre** vere oppure no:

   (a) $\dim U^{\perp} = 3$; sì ◯ no ◯

   (b) se $\dim W = 3$, allora $\dim(W \cap U) = 0$; sì ◯ no ◯

   (c) $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \notin U$. sì ◯ no ◯

---

5. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata di ordine 3 con $\det A = -4$. Calcolare i seguenti determinanti:

   $\det A^3 =$ $\det(-3A) =$ $\det(2A) =$ $\det(A^{-1}) =$

---

6. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ (motivare la risposta).

---

7. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare; sia $\operatorname{Ker} L = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}$. L è suriettiva? motivare la risposta.

---

8. Sia $AX = B$ un sistema di 6 equazioni in 5 incognite. Posto $\tilde{A} = (A|B)$, supponendo che non esistano soluzioni e $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, determinare:

   $\operatorname{rg} A =$; $\operatorname{rg}(\tilde{A}) =$.
