| CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA | 10 luglio 2015 |
|---|---|
| Cognome e Nome: | Matricola: |
| Corso di Laurea: | Anno di corso: |

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A$ di ordine 4, il vettore $B \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

e l'operatore lineare $L \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(X) = AX$.

(a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} L$ e una base per $\operatorname{Ker} L$:

(b) Determinare $\dim \operatorname{Im} L$ e una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare per quali valori di $k$ il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni:

(d) Fornire la soluzione parametrica del sistema per $k = 1$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano $\pi$ di equazione $x + 2y + 3z = 3$. Determinare:

(a) Le coordinate del punto $P$ intersezione di $\pi$ con l'asse $z$.

(b) Le equazioni cartesiane della retta $s$ per $P$ ortogonale a $\pi$:

(c) La direzione della retta $r$ intersezione di $\pi$ col piano $xOy$:

(d) La posizione reciproca di $r$ e $s$:

---

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V\colon \begin{cases} x-y=0 \\ t-z=0 \\ x-y+2z-2t=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; \qquad U=\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di $V$:

(b) Determinare la dimensione del sottospazio $U+V$:

(c) Determinare le equazioni cartesiane e una base **ortogonale** di $U^{\perp}$:

(d) Fornire le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{pmatrix}$ su $U$ e su $U^{\perp}$.

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Il polinomio caratteristico $p_A(t)$:

(b) Gli autovalori di $A$, con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Una base per ciascuno degli autospazi di $A$:

(d) Stabilire se la base del sottospazio somma di tutti gli autospazi è una base di $\mathbb{R}^3$ (giustificare la risposta).

---

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **10 luglio 2015** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di Laurea:** | **Anno di corso:** |

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A$ di ordine 4, il vettore $B \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} k^2 \\ k^2 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

e l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(X) = AX$.

(a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} L$ e una base per $\operatorname{Ker} L$:

(b) Determinare $\dim \operatorname{Im} L$ e una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare per quali valori di $k$ il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni:

(d) Fornire la soluzione parametrica del sistema per $k = 2$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano $\pi$ di equazione $2x + y + 3z = 2$. Determinare:

(a) Le coordinate del punto $P$ intersezione di $\pi$ con l'asse $x$.

(b) Le equazioni cartesiane della retta $s$ per $P$ ortogonale a $\pi$:

(c) La direzione della retta $r$ intersezione di $\pi$ col piano $xOy$:

(d) La posizione reciproca di $r$ e $s$:

---

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V\colon \begin{cases} x+y=0 \\ t+z=0 \\ x+y-3t-3z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; \qquad U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di $V$:

(b) Determinare la dimensione del sottospazio $U+V$:

(c) Determinare le equazioni cartesiane e una base **ortogonale** di $U^\perp$:

(d) Fornire le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ su $U$ e su $U^\perp$.

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Il polinomio caratteristico $p_A(t)$:

(b) Gli autovalori di $A$, con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Una base per ciascuno degli autospazi di $A$:

(d) Stabilire se la base del sottospazio somma di tutti gli autospazi è una base di $\mathbb{R}^3$ (giustificare la risposta).

---

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **10 luglio 2015** |
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di Laurea:** | **Anno di corso:** |

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A$ di ordine 4, il vettore $B \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} k^2 \\ k^2 \\ -2k \\ 0 \end{pmatrix}$$

e l'operatore lineare $L \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(X) = AX$.

(a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} L$ e una base per $\operatorname{Ker} L$:

(b) Determinare $\dim \operatorname{Im} L$ e una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare per quali valori di $k$ il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni:

(d) Fornire la soluzione parametrica del sistema per $k = -1$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano $\pi$ di equazione $3x + 2y + z = 2$. Determinare:

(a) Le coordinate del punto $P$ intersezione di $\pi$ con l'asse $z$.

(b) Le equazioni cartesiane della retta $s$ per $P$ ortogonale a $\pi$:

(c) La direzione della retta $r$ intersezione di $\pi$ col piano $xOy$:

(d) La posizione reciproca di $r$ e $s$:

---

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V\colon \begin{cases} x - z = 0 \\ t - y = 0 \\ x - z + t - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di $V$:

(b) Determinare la dimensione del sottospazio $U + V$:

(c) Determinare le equazioni cartesiane e una base **ortogonale** di $U^\perp$:

(d) Fornire le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ su $U$ e su $U^\perp$.

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Il polinomio caratteristico $p_A(t)$:

(b) Gli autovalori di $A$, con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Una base per ciascuno degli autospazi di $A$:

(d) Stabilire se la base del sottospazio somma di tutti gli autospazi è una base di $\mathbb{R}^3$ (giustificare la risposta).

---

| CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA | 10 luglio 2015 |
|---|---|
| Cognome e Nome: | Matricola: |
| Corso di Laurea: | Anno di corso: |

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A$ di ordine 4, il vettore $B \in \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} k^2 \\ 0 \\ -2k \\ k^2 \end{pmatrix}$$

e l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(X) = AX$.

(a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} L$ e una base per $\operatorname{Ker} L$:

(b) Determinare $\dim \operatorname{Im} L$ e una rappresentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare per quali valori di $k$ il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni:

(d) Fornire la soluzione parametrica del sistema per $k = -2$:

---

2. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano $\pi$ di equazione $x + y + 3z = 2$. Determinare:

(a) Le coordinate del punto $P$ intersezione di $\pi$ con l'asse $x$.

(b) Le equazioni cartesiane della retta $s$ per $P$ ortogonale a $\pi$:

(c) La direzione della retta $r$ intersezione di $\pi$ col piano $xOy$:

(d) La posizione reciproca di $r$ e $s$:

---

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V\colon \begin{cases} x+z=0 \\ t+y=0 \\ 2x+2z+t+y=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di $V$:

(b) Determinare la dimensione del sottospazio $U+V$:

(c) Determinare le equazioni cartesiane e una base **ortogonale** di $U^\perp$:

(d) Fornire le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ su $U$ e su $U^\perp$.

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) Il polinomio caratteristico $p_A(t)$:

(b) Gli autovalori di $A$, con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Una base per ciascuno degli autospazi di $A$:

(d) Stabilire se la base del sottospazio somma di tutti gli autospazi è una base di $\mathbb{R}^3$ (giustificare la risposta).

---