CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 settembre 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Quando un'applicazione $L\colon V \to W$ fra due spazi vettoriali è detta *lineare*?

Fornire un esempio di applicazione lineare fra spazi vettoriali finitamente generati.

B. Fornire la definizione di forma quadratica in $\mathbb{R}^n$; successivamente dire quando una forma quadratica viene detta definita positiva e fornirne un esempio in 3 variabili.

---

1. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^4$, con $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere, giustificando la risposta.

   (a) $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\dim(U \cap W) \geq 1$; sì ◯ no ◯

   (c) la somma è diretta $U \oplus W$; sì ◯ no ◯

   (d) se $U + W \neq \mathbb{R}^4$, allora $U \subset W$. sì ◯ no ◯

---

2. Siano $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Determinare un vettore non nullo $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $X \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1)$, $X \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_2)$ e $X \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

---

3. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ matrici quadrate; sia $M \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ tale $B = M^{-1}AM$. Se A è invertibile, è possibile affermare che B è invertibile? (motivare la risposta)

---

4. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = 1 \right\}$ sì ◯ no ◯

   (b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = z = 0 \right\}$ sì ◯ no ◯

   (c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = 2z \right\}$ sì ◯ no ◯

   (d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y^2 \right\}$ sì ◯ no ◯

---

5. Sia $AX = B$ un sistema di k equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere.

   (a) se $k = n$ allora il sistema ha un'unica soluzione. sì ◯ no ◯

   (b) se $\operatorname{rg} A = n$ allora il sistema ha necessariamente un'unica soluzione. sì ◯ no ◯

   (c) se $k = n$ e $\det A \neq 0$, allora il sistema ha un'unica soluzione. sì ◯ no ◯

   (d) se $B = 0$ e $\operatorname{rg}(A) < n$ il sistema ha soluzioni non banali. sì ◯ no ◯

---

6. Siano A una matrice quadrata reale di ordine 3 e $p_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità $\mu = 2$; sì ◯ no ◯

   (b) $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità $\mu = 2$; sì ◯ no ◯

   (c) $t = 0$ è autovalore semplice di A; sì ◯ no ◯

   (d) $p_A(t)$ non è totalmente decomponibile. sì ◯ no ◯

---

7. Sia A una matrice 2×2 con $\det A = 0$ e tale che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinare il polinomio caratteristico di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

---

8. Definire il prodotto scalare fra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e la norma di un vettore $X \in \mathbb{R}^n$. Sia $X = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, determinare un versore $Y \in \operatorname{Span}(X)$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 settembre 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Quando un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V è detto *sottospazio vettoriale*? Fornire un esempio di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato.

B. Fornire la definizione di forma quadratica in $\mathbb{R}^n$; successivamente dire quando una forma quadratica viene detta definita negativa e fornirne un esempio in 3 variabili.

---

1. Definire il prodotto scalare fra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e l'ortogonalità fra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Sia $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, determinare due vettori Y_1 e Y_2 ortogonali a X.

---

2. Siano $\left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$. Determinare un vettore non nullo $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $X \notin \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1)$, $X \notin \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_2)$ e $X \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1) + \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_2)$.

---

3. Sia $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$.

   Dire se $\boldsymbol{f}$ è iniettiva, motivando la risposta.

---

4. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^4$, con $\dim U = 2$ e $\dim W = 2$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere, giustificando la risposta.

   (a) se $\dim(U+W) \leq 3$ allora $\dim(U \cap W) \geq 1$; sì ◯ no ◯
   (b) $\dim(U+W) = 4$; sì ◯ no ◯
   (c) se la somma è diretta allora $U \oplus W = \mathbb{R}^4$; sì ◯ no ◯
   (d) se $U + W \neq \mathbb{R}^4$, allora $\dim(U \cap W) = 0$. sì ◯ no ◯

---

5. Siano A una matrice quadrata reale di ordine 3 e $p_A(t) = -t^3 - t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) $t = -1$ è autovalore semplice di A; sì ◯ no ◯
   (b) $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità $\mu = 2$; sì ◯ no ◯
   (c) $t = 0$ è autovalore semplice di A; sì ◯ no ◯
   (d) $p_A(t)$ non è totalmente decomponibile. sì ◯ no ◯

---

6. Sia $AX = B$ un sistema di k equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere.

   (a) se il sistema ha infinite soluzioni, allora $\operatorname{rg} A < n$; sì ◯ no ◯
   (b) se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = n$, allora il sistema ha un'unica soluzione; sì ◯ no ◯
   (c) se $B = 0$, allora il sistema ammette solo la soluzione banale; sì ◯ no ◯
   (d) se $k = n$ allora il sistema ammette un'unica soluzione. sì ◯ no ◯

---

7. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ matrici quadrate; sia $M \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ tale $B = M^{-1}AM$. Se A è diagonalizzabile, è possibile affermare che B è diagonalizzabile? (motivare la risposta)

---

8. Sia A una matrice 2×2 con $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ tale che $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Determinare il polinomio caratteristico di A e stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 settembre 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Fornire la definizione di forma quadratica in $\mathbb{R}^n$; successivamente dire quando una forma quadratica viene detta semidefinita positiva e fornirne un esempio in 3 variabili.

B. Quando un'applicazione $L\colon V \to W$ fra due spazi vettoriali è detta *lineare*?

Fornire un esempio di applicazione *NON* lineare fra spazi vettoriali finitamente generati.

---

1. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^5$, con $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere, giustificando la risposta.

   (a) se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ allora $U \oplus W = \mathbb{R}^5$; sì ◯ no ◯

   (b) $\dim(U \cap W) \neq 0$; sì ◯ no ◯

   (c) U e W sono in somma diretta, ossia $U + W = U \oplus W$; sì ◯ no ◯

   (d) se $U + W = \mathbb{R}^5$, allora $\dim(U \cap W) = 0$. sì ◯ no ◯

---

2. Definire il prodotto scalare fra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e la norma di un vettore $X \in \mathbb{R}^n$. Sia $X = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, determinare un versore $Y \in \mathrm{Span}(X)$.

---

3. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ matrici quadrate; sia $M \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ tale $B = M^{-1}AM$. Se B è invertibile, è possibile affermare che A è invertibile? (motivare la risposta)

---

4. Siano $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Determinare un vettore non nullo $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $X \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1)$, $X \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_2)$ e $X \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

---

5. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

   (a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y^2 = 0 \right\}$ sì ◯ no ◯

   (b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y = 0 \right\}$ sì ◯ no ◯

   (c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 2y = 3z \right\}$ sì ◯ no ◯

   (d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 3y = z = 0 \right\}$ sì ◯ no ◯

---

6. Sia $AX = B$ un sistema di k equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere.

   (a) se $B = 0$ e $\mathrm{rg}\, A = n$, allora il sistema ammette soluzioni non banali; sì ◯ no ◯

   (b) se il sistema ha infinite soluzioni allora $\mathrm{rg}\, A < n$; sì ◯ no ◯

   (c) se il sistema ammette una sola soluzione soluzione allora $\mathrm{rg}\, A = n$; sì ◯ no ◯

   (d) se il sistema ha un'unica soluzione allora $k = n$. sì ◯ no ◯

---

7. Siano A una matrice quadrata reale di ordine 3 e $p_A(t) = -t^3 + t^2$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità $\mu = 2$; sì ◯ no ◯

   (b) $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità $\mu = 2$; sì ◯ no ◯

   (c) $t = 0$ è autovalore di A con molteplicità $\mu = 2$; sì ◯ no ◯

   (d) $p_A(t)$ è totalmente decomponibile. sì ◯ no ◯

---

8. Sia A una matrice 2×2 tale che $\det A = 0$ e $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinare il polinomio caratteristico di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 settembre 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

A. Fornire la definizione di forma quadratica in $\mathbb{R}^n$; successivamente dire quando una forma quadratica viene detta semidefinita negativa e fornirne un esempio in 3 variabili.

B. Quando un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V è detto *sottospazio vettoriale*?

Fornire un esempio di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale finitamente generato che *non* sia un sottospazio vettoriale.

---

1. Sia $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$.

Dire se $\boldsymbol{f}$ è iniettiva, motivando la risposta.

---

2. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^5$, con $\dim U = 2$ e $\dim W = 2$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere, giustificando la risposta.

(a) sicuramente $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$; sì ◯ no ◯

(b) $\dim(U + W) \leq 4$; sì ◯ no ◯

(c) se la somma è diretta $U \oplus W = \mathbb{R}^5$; sì ◯ no ◯

(d) se $\dim(U \cap W) \neq 0$, allora $\dim(U + W) \leq 3$. sì ◯ no ◯

---

3. Siano $\left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$. Determinare un vettore non nullo $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $X \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1)$, $X \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_2)$ e $X \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1) + \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_2)$.

---

4. Sia $AX = B$ un sistema di k equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere.

   (a) se $B = 0$ e $\mathrm{rg}\, A = n$ allora il sistema ha solo la soluzione banale. sì ◯ no ◯

   (b) se $\mathrm{rg}\, A < n$ allora il sistema ha sicuramente infinite soluzioni. sì ◯ no ◯

   (c) se $k = n$ il sistema ha un'unica soluzione. sì ◯ no ◯

   (d) se $\mathrm{rg}\, A = r(A|B) = n$ allora il sistema ammette un'unica soluzione. sì ◯ no ◯

---

5. Siano A una matrice quadrata reale di ordine 3 e $p_A(t) = -t^3 - t^2$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità $\mu = 2$; sì ◯ no ◯

   (b) $t = 0$ è autovalore semplice di A; sì ◯ no ◯

   (c) $t = -1$ è autovalore semplice di A; sì ◯ no ◯

   (d) $p_A(t)$ non è totalmente decomponibile. sì ◯ no ◯

---

6. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ matrici quadrate; sia $M \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ tale $B = M^{-1}AM$. Se B è diagonalizzabile, è possibile affermare che A è diagonalizzabile? (motivare la risposta)

---

7. Sia A una matrice 2×2 con $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$ e tale che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Determinare il polinomio caratteristico di A e stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A.

---

8. Definire il prodotto scalare fra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e l'ortogonalità fra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Sia $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, determinare due vettori Y_1 e Y_2 ortogonali a X.
