CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	9 settembre 2015
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(6 pt)** Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & h & h & -1 \\ 3+h & h & 3h & -3 \\ 2+h & 0 & 2h & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} h \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcolare il rango di A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (b) Calcolare il rango di $\tilde{A} = (A|B)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (c) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni:

   (d) Per i valori trovati al punto precedente, si calcoli la dimensione della varietà lineare delle soluzioni e si trovi una rappresentazione parametrica:

---

2. **(6 pt)** Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, si consideri l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

   $$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4, \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4, \quad L(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{0}.$$

   (a) Scrivere la matrice associata a L nella base $\mathcal{B}$:

   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e una sua base:

   (c) Determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e una rappresentazione cartesiana:

   (d) Stabilire, motivando la risposta, se il sottospazio U di equazioni $x-y = z = 0$ è un sottospazio complementare di $\operatorname{Ker} L$:

---

3. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 2, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, e $Q = (1, 2, 3)$. Determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per l'origine e contenente i punti A e B:

   (b) una rappresentazione parametrica della retta s passante per Q e diretta come AB:

   (c) una rappresentazione cartesiana per il piano σ passante per Q e parallelo a π:

   (d) la proiezione ortogonale di Q su π:

   (e) la distanza tra i piani π e σ:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\det A =$, $\operatorname{rg} A =$, $\operatorname{tr} A =$.

   (b) Stabilire se 0 è autovalore della matrice A, e in caso affermativo determinarne le equazioni dell'autospazio associato ed una sua base:

   (c) Determinare gli autovalori di A, con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Stabilire se esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A ed in caso affermativo, determinarla.

   (e) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$Q(X) = X^{\mathrm{T}}(A + hI_3)\, X$$

   è definita positiva.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 settembre 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Siano $A = \begin{pmatrix} 5+h & 3h+6 & h+2 & -3 \\ 1 & h+2 & h+2 & -1 \\ 4+h & 2h+4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 \\ h+1 \\ 4 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcolare il rango di A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (b) Calcolare il rango di $\tilde{A} = (A|B)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (c) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni:

   (d) Per i valori trovati al punto precedente, si calcoli la dimensione della varietà lineare delle soluzioni e si trovi una rappresentazione parametrica:

---

2. **(6 pt)** Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, si consideri l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

   $$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4, \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4, \quad L(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4\,.$$

   (a) Scrivere la matrice associata a L nella base $\mathcal{B}$:

   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e una sua base:

   (c) Determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e una rappresentazione cartesiana:

   (d) Stabilire, motivando la risposta, se il sottospazio U di equazioni $x+y+z+t = 0$ è un sottospazio complementare di $\operatorname{Ker} L$:

---

3. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (2, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, e $Q = (1, 2, 4)$. Determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per l'origine e contenente i punti A e B:

   (b) una rappresentazione parametrica della retta s passante per Q e diretta come AB:

   (c) una rappresentazione cartesiana per il piano σ passante per Q e parallelo a π:

   (d) la proiezione ortogonale di Q su π:

   (e) la distanza tra i piani π e σ:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\det A =$, $\operatorname{rg} A =$, $\operatorname{tr} A =$.

   (b) Stabilire se 0 è autovalore della matrice A, e in caso affermativo determinarne le equazioni dell'autospazio associato ed una sua base:

   (c) Determinare gli autovalori di A, con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Stabilire se esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A ed in caso affermativo, determinarla.

   (e) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$Q(X) = X^{\mathrm{T}}(A + hI_3)\, X$$

   è semidefinita positiva.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	9 settembre 2015
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & h & h & 1 \\ h-2 & 0 & 2h & 2 \\ h-3 & h & 3h & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} h \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcolare il rango di A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (b) Calcolare il rango di $\tilde{A} = (A|B)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (c) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni:

   (d) Per i valori trovati al punto precedente, si calcoli la dimensione della varietà lineare delle soluzioni e si trovi una rappresentazione parametrica:

---

2. **(6 pt)** Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, si consideri l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \quad L(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\,.$$

   (a) Scrivere la matrice associata a L nella base $\mathcal{B}$:

   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e una sua base:

   (c) Determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e una rappresentazione cartesiana:

   (d) Stabilire, motivando la risposta, se il sottospazio U di equazioni $x+y = z = 0$ è un sottospazio complementare di $\operatorname{Ker} L$:

---

3. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, e $Q = (2, 3, 0)$. Determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per l'origine e contenente i punti A e B:

   (b) una rappresentazione parametrica della retta s passante per Q e diretta come AB:

   (c) una rappresentazione cartesiana per il piano σ passante per Q e parallelo a π:

   (d) la proiezione ortogonale di Q su π:

   (e) la distanza tra i piani π e σ:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\det A =$, $\operatorname{rg} A =$, $\operatorname{tr} A =$.

   (b) Stabilire se 0 è autovalore della matrice A, e in caso affermativo determinarne le equazioni dell'autospazio associato ed una sua base:

   (c) Determinare gli autovalori di A, con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Stabilire se esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A ed in caso affermativo, determinarla.

   (e) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$Q(X) = X^{\mathrm{T}}(A + hI_3)\, X$$

   è definita negativa.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 settembre 2015**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 4-h & 3-3h & 1-h \\ 2 & 3-h & 2-2h & 0 \\ 1 & 1 & 1-h & 1-h \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -h \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcolare il rango di A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (b) Calcolare il rango di $\tilde{A} = (A|B)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (c) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni:

   (d) Per i valori trovati al punto precedente, si calcoli la dimensione della varietà lineare delle soluzioni e si trovi una rappresentazione parametrica:

---

2. **(6 pt)** Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, si consideri l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

   $$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4, \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4, \quad L(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4\,.$$

   (a) Scrivere la matrice associata a L nella base $\mathcal{B}$:

   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e una sua base:

   (c) Determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e una rappresentazione cartesiana:

   (d) Stabilire, motivando la risposta, se il sottospazio U di equazioni $x+y+z+t = 0$ è un sottospazio complementare di $\operatorname{Ker} L$:

---

3. **(6 pt)** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 0, 1)$, e $Q = (4, 3, 0)$. Determinare:

   (a) una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per l'origine e contenente i punti A e B:

   (b) una rappresentazione parametrica della retta s passante per Q e diretta come AB:

   (c) una rappresentazione cartesiana per il piano σ passante per Q e parallelo a π:

   (d) la proiezione ortogonale di Q su π:

   (e) la distanza tra i piani π e σ:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\det A =$, $\operatorname{rg} A =$, $\operatorname{tr} A =$.

   (b) Stabilire se 0 è autovalore della matrice A, e in caso affermativo determinarne le equazioni dell'autospazio associato ed una sua base:

   (c) Determinare gli autovalori di A, con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Stabilire se esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A ed in caso affermativo, determinarla.

   (e) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$Q(X) = X^{\mathrm{T}}(A + hI_3)\, X$$

   è semidefinita negativa.
