CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 gennaio 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Enunciare le proprietà che deve soddisfare una funzione $L\colon V \to W$ tra spazi vettoriali per essere lineare.

   Produrre un esempio di una funzione $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che *non* sia lineare.

---

2. Dire se i seguenti punti appartengono alla retta $r\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t\,, \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$:

   (a) $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (b) $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (c) $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (d) $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

---

3. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V; sia $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Dire se $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in U$ motivando la risposta.

---

4. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ due matrici invertibili. Segnalare l'espressione corretta per la matrice $(AB)^{-1}$:

   ◯ $A^{-1}B^{-1}$, ◯ $A^{-1}B + AB^{-1}$, ◯ $B^{-1}A^{-1}$, ◯ AB^{-1}.

---

5. Indicare quali delle seguenti matrici sono invertibili:

$\bigcirc\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $\quad\bigcirc\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

---

6. Si consideri la forma quadratica $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2$. Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa, o indefinita).

---

7. Sia A una matrice quadrata 3×3, con autovalore $\lambda = 7$ di molteplicità algebrica 3; supponendo che A sia diagonalizzabile, verificare che $A = 7I_3$.

---

8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ una lista di suoi vettori linearmente *indipendenti*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere:

   (a) $\dim V \geq 4$; sì ◯ no ◯

   (b) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 + \boldsymbol{v}_3\}$ sono linearmente indipendenti; sì ◯ no ◯

   (c) $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = V$; sì ◯ no ◯

   (d) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ sono sempre una base di V. sì ◯ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**18 gennaio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Enunciare le proprietà che deve soddisfare un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V per essere un sottospazio vettoriale.

   Produrre un esempio di un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^3$ che *non* sia sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

---

2. Dire se i seguenti punti appartengono al piano contenente l'origine e i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (b) $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (c) $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (d) $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

---

3. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V; sia $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Dire se $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1) \subset U$ motivando la risposta.

---

4. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ due matrici quadrate. Segnalare l'espressione corretta per la matrice $(AB)^{\mathrm{T}}$:

   ◯ $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$, ◯ $A^{\mathrm{T}}B + AB^{\mathrm{T}}$, ◯ $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, ◯ AB^{T}.

---

5. Indicare quali delle seguenti matrici sono ortogonali:

○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

---

6. Si consideri la forma quadratica $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$. Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa, o indefinita).

---

7. Sia A una matrice 3×3, con autovalore $\lambda = -2$ di molteplicità algebrica 3; verificare che $\det A = -8$.

---

8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ una lista di suoi vettori linearmente *dipendenti*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere:

   (a) $\dim V \leq 4$; sì ○ no ○

   (b) $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) < 4$; sì ○ no ○

   (c) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_4\}$ sono linearmente indipendenti; sì ○ no ○

   (d) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ sono generatori di V. sì ○ no ○

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**18 gennaio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Enunciare le proprietà che deve soddisfare una funzione $L\colon V \to W$ tra spazi vettoriali per essere lineare.

   Produrre un esempio di una funzione $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che *sia* lineare.

---

2. Dire se i seguenti punti appartengono alla retta $r\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t\,, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$:

   (a) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (b) $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (c) $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (d) $P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

---

3. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V; sia $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Dire se $7\boldsymbol{v}_1 \in U$ motivando la risposta.

---

4. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ due matrici invertibili. Segnalare l'espressione corretta per la matrice $(AB)^{-1}$:

   ◯ $B^{-1}A^{-1}$, ◯ $A^{-1}B^{-1}A^{-1}$, ◯ $A^{-1}B + AB^{-1}$, ◯ AB^{-1}.

---

5. Indicare quali delle seguenti matrici sono invertibili:

$\bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\bigcirc \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

---

6. Si consideri la forma quadratica $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2$. Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa, o indefinita).

---

7. Sia A una matrice quadrata 3×3, con autovalore $\lambda = 4$ di molteplicità algebrica 3; supponendo che A sia diagonalizzabile, verificare che $A = 4I_3$.

---

8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ una lista di suoi vettori linearmente *indipendenti*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere:

   (a) $\dim V = 4$; sì ◯ no ◯

   (b) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ sono linearmente indipendenti; sì ◯ no ◯

   (c) $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \cap \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = \{\boldsymbol{0}\}$; sì ◯ no ◯

   (d) ogni base di V contiene $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$. sì ◯ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**18 gennaio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Enunciare le proprietà che deve soddisfare un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V per essere un sottospazio vettoriale.

   Produrre un esempio di un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^4$ che *sia* un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

---

2. Dire se i seguenti punti appartengono al piano contenente l'origine e i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (b) $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (c) $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

   (d) $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sì ◯ no ◯

---

3. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V; sia $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Dire se $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \subset U$ motivando la risposta.

---

4. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ due matrici quadrate. Segnalare l'espressione corretta per la matrice $(AB)^{\mathrm{T}}$:

   ◯ $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$, ◯ $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, ◯ $A^{\mathrm{T}}B$, ◯ $A^{\mathrm{T}}B + AB^{\mathrm{T}}$.

---

5. Indicare quali delle seguenti matrici sono ortogonali:

○ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

---

6. Si consideri la forma quadratica $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 - x_3^2$. Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa, o indefinita).

---

7. Sia A una matrice quadrata 3×3, con autovalore $\lambda = -5$ di molteplicità algebrica 3; verificare che $\det A = -125$.

---

8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ una lista di suoi vettori linearmente *dipendenti*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **sempre** vere:

   (a) $\dim V < 4$; sì ○ no ○

   (b) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ sono linearmente indipendenti; sì ○ no ○

   (c) $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$; sì ○ no ○

   (d) non esiste una base di V che contiene i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$. sì ○ no ○
