

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 gennaio 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. (6 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & h & h+6 & 6 \\ h+6 & -3 & h+3 & h+3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+h \\ h \\ -3-2h \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di h :
- (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 2:
- (d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

2. (6 pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

- (a) l'equazione in forma cartesiana del piano π contenente i punti A , B e C :
- (b) la retta $r = AB$ mediante equazioni cartesiane:
- (c) l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a r e passante per O :
- (d) la distanza di C da α :

3. (6 pt) Si considerino le seguenti matrici quadrate di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare gli autovalori delle matrici A e B , con relative molteplicità algebriche e geometriche.
- (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi per la matrice A .
- (c) Le matrici A e B sono simili? Giustificare esplicitamente la risposta.

4. (6 pt) Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^4 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + t = 0 \right\}.$$

- (a) Trovare una base ortogonale \mathcal{B}_U di U :
- (b) Fornire in forma cartesiana le equazioni del sottospazio U^\perp :
- (c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sui sottospazi complementari U e U^\perp :
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 gennaio 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. (6 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ h+5 & 6 & h-1 & 6 \\ h+2 & h+5 & -3 & h+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h \\ h-1 \\ -1-2h \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di h :
- (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 2:
- (d) Posto $h = 1$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

2. (6 pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

- (a) l'equazione in forma cartesiana del piano π contenente i punti A , B e C :
- (b) la retta $r = AB$ mediante equazioni cartesiane:
- (c) l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a r e passante per O :
- (d) la distanza di C da α :

3. (6 pt) Si considerino le seguenti matrici quadrate di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori delle matrici A e B , con relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi per la matrice A .

(c) Le matrici A e B sono simili? Giustificare esplicitamente la risposta.

4. (6 pt) Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^4 :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid t - z = x + y - t = 0 \right\}.$$

(a) Trovare una base ortogonale \mathcal{B}_V di V :

(b) Fornire in forma cartesiana le equazioni del sottospazio V^\perp :

(c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sui sottospazi complementari V e V^\perp :

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 gennaio 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. (6 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & h+9 & h+3 & 6 \\ h+3 & 2h+3 & h & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h-2 \\ h-3 \\ 3-2h \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di h :
- (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 2:
- (d) Posto $h = 3$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

2. (6 pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

- (a) l'equazione in forma cartesiana del piano π contenente i punti A , B e C :
- (b) la retta $r = AB$ mediante equazioni cartesiane:
- (c) l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a r e passante per O :
- (d) la distanza di C da α :

3. (6 pt) Si considerino le seguenti matrici quadrate di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare gli autovalori delle matrici A e B , con relative molteplicità algebriche e geometriche.
- (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi per la matrice A .
- (c) Le matrici A e B sono simili? Giustificare esplicitamente la risposta.

4. (6 pt) Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^4 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = 0 \right\}.$$

- (a) Trovare una base ortogonale \mathcal{B}_U di U :
- (b) Fornire in forma cartesiana le equazioni del sottospazio U^\perp :
- (c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sui sottospazi complementari U e U^\perp :
-

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 gennaio 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. (6 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ h+2 & 6 & h+8 & 6 \\ h-1 & h+2 & 2h+1 & h-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h-3 \\ h-4 \\ 5-2h \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di h :
- (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 2:
- (d) Posto $h = 4$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

2. (6 pt) Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare:

- (a) l'equazione in forma cartesiana del piano π contenente i punti A , B e C :
- (b) la retta $r = AB$ mediante equazioni cartesiane:
- (c) l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a r e passante per O :
- (d) la distanza di C da α :

3. (6 pt) Si considerino le seguenti matrici quadrate di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare gli autovalori delle matrici A e B , con relative molteplicità algebriche e geometriche.
- (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi per la matrice A .
- (c) Le matrici A e B sono simili? Giustificare esplicitamente la risposta.

4. (6 pt) Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^4 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + z + t = y = 0 \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = x - z + t = 0 \right\}.$$

- (a) Trovare una base ortogonale \mathcal{B}_V di V :
- (b) Fornire in forma cartesiana le equazioni del sottospazio V^\perp :
- (c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sui sottospazi complementari V e V^\perp :
-