CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	4 febbraio 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Siano V uno spazio vettoriale reale e $G = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ una lista di vettori di V. Dire a quale condizione G è una lista di generatori di V e fornire un esempio di generatori di $\mathbb{R}^2$ che **non** siano linearmente indipendenti.

---

2. Siano A e B due matrici in $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) Se A e B sono invertibili allora $A\,B$ è invertibile. sì ◯ no ◯

   (b) Anche se A e B sono simmetriche, $A + B$ può non essere simmetrica. sì ◯ no ◯

   (c) Se le colonne di A sono un sistema di vettori ortogonali allora A è ortogonale. sì ◯ no ◯

   (d) Se A e B sono ortogonali allora $A\,B$ è ortogonale. sì ◯ no ◯

---

3. Sia $A = (A^1 | \ldots | A^4) \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice quadrata Il sistema $A\,X = A^1 - 2A^3$ è risolubile? In caso affermativo, fornirne almeno una soluzione (motivare la risposta).

---

4. Indicare con $\otimes$ tra le matrici seguenti quelle che rappresentano una forma quadratica definita (positiva oppure negativa):

$$\bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bigcirc \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bigcirc \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

---

5. Si consideri la funzione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y + 1$. Posto $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si calcoli

$$L(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \qquad\qquad L(\boldsymbol{v}_1) + L(\boldsymbol{v}_2) =$$

---

6. Sia $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dire quali delle seguenti liste di vettori sono una **base** del complemento ortogonale di $\mathrm{Span}(X)$:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

---

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Stabilire per quale/i delle seguenti matrici N la matrice $N^{-1}AN$ è diagonale:

◯ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

---

8. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Stabilire se i seguenti vettori sono autovettori di A, specificandone l'autovalore λ corrispondente:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; sì ◯ $\lambda =$ no ◯

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; sì ◯ $\lambda =$ no ◯

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; sì ◯ $\lambda =$ no ◯

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. sì ◯ $\lambda =$ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	4 febbraio 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Siano V uno spazio vettoriale reale e $S = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ una lista di vettori di V. Dire a quale condizione i vettori di S sono linearmente indipendenti e fornire un esempio di una lista di vettori in $\mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti che **non** siano generatori di $\mathbb{R}^4$.

---

2. Siano A e B due matrici in $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) Se A è simmetrica, $3A$ è simmetrica. sì ◯ no ◯

   (b) Se $A\,B$ è invertibile allora A e B sono invertibili. sì ◯ no ◯

   (c) Se le colonne di A sono un sistema di vettori ortonormali allora A è ortogonale. sì ◯ no ◯

   (d) Anche se A e B sono ortogonali $A\,B$ può non essere ortogonale. sì ◯ no ◯

---

3. Sia $A = (A^1|\dots|A^3) \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4,3)$ la matrice dei coefficienti del sistema lineare $A\,X = B$; sia inoltre $X_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ una soluzione (ossia, $A\,X_0 = B$). Il sistema $A\,X = A^1 + B$ è risolubile? In caso affermativo, fornirne almeno una soluzione (motivare la risposta).

---

4. Indicare con $\otimes$ tra le matrici seguenti quelle che rappresentano una forma quadratica semidefinita (positiva oppure negativa):

$$\bigcirc \begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix} \qquad \bigcirc \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \qquad \bigcirc \begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix} \qquad \bigcirc \begin{pmatrix}2&2\\2&-1\end{pmatrix} \qquad \bigcirc \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

---

5. Si consideri la funzione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2x + y^2 + 1$. Posto $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ si calcoli

$$3L(\boldsymbol{v}) = \qquad\qquad L(3\boldsymbol{v}) =$$

---

6. Sia $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dire quali delle seguenti liste di vettori sono **generatori** del complemento ortogonale di Span(X):

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ○ no ○

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ○ no ○

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ○ no ○

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ○ no ○

---

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Stabilire per quale/i delle seguenti matrici N la matrice $N^{-1}AN$ è diagonale:

   ○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

---

8. Sia
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Quali dei seguenti vettori sono autovettori di A relativi all'autovalore 0.

   ○ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**4 febbraio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Siano V uno spazio vettoriale reale e $G = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ una lista di vettori di V. Dire a quale condizione G è una lista di generatori di V e fornire un esempio di generatori di $\mathbb{R}^3$ che siano linearmente indipendenti.

---

2. Siano A e B due matrici in $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) Se A è ortogonale allora $2A$ è ortogonale. sì ◯ no ◯

   (b) Se A e B sono invertibili allora $A\,B$ è invertibile. sì ◯ no ◯

   (c) Se A e B sono simmetriche, $A + B$ è simmetrica. sì ◯ no ◯

   (d) Se A e B sono ortogonali allora $A\,B$ è ortogonale. sì ◯ no ◯

---

3. Sia $A = (A^1|\dots|A^4) \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3,4)$. Il sistema $A\,X = 7A^2 - A^4$ è risolubile? In caso affermativo, fornirne almeno una soluzione (motivare la risposta).

---

4. Indicare con $\otimes$ tra le matrici seguenti quelle che rappresentano una forma quadratica indefinita:

   ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

---

5. Si consideri la funzione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2y + 1$. Posto $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si calcoli

$$L(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \qquad\qquad L(\boldsymbol{v}_1) + L(\boldsymbol{v}_2) =$$

---

6. Sia $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dire quali delle seguenti liste di vettori sono una **base** del complemento ortogonale di $\mathrm{Span}(X)$:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

---

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Stabilire per quale/i delle seguenti matrici N la matrice $N^{-1}AN$ è diagonale:

◯ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

---

8. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Stabilire se i seguenti vettori sono autovettori di A, specificandone l'autovalore λ corrispondente:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; sì ◯ $\lambda =$ no ◯

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; sì ◯ $\lambda =$ no ◯

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; sì ◯ $\lambda =$ no ◯

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. sì ◯ $\lambda =$ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**4 febbraio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Siano V uno spazio vettoriale reale e $S = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ una lista di vettori di V. Dire a quale condizione i vettori di S sono linearmente indipendenti e fornire un esempio di una lista di vettori in $\mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti che siano generatori di $\mathbb{R}^4$.

---

2. Siano A e B due matrici in $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

   (a) Se A è ortogonale, allora $-A$ è ortogonale. sì ◯ no ◯

   (b) Se A e B sono simmetriche, allora $A - B$ è simmetrica. sì ◯ no ◯

   (c) Anche se A e B sono ortogonali $A\,B$ può non essere ortogonale. sì ◯ no ◯

   (d) Anche se A o B non sono invertibili, può accadere che $A\,B$ sia invertibile. sì ◯ no ◯

---

3. Sia $A = (A^1|\ldots|A^4) \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3,4)$ la matrice dei coefficienti del sistema lineare $A\,X = B$; sia inoltre $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ una soluzione (ossia, $A\,X_0 = B$). Il sistema $A\,X = -A^1 + B$ è risolubile? In caso affermativo, fornirne almeno una soluzione (motivare la risposta).

---

4. Indicare con $\otimes$ tra le matrici seguenti quelle che rappresentano una forma quadratica semidefinita (positiva oppure negativa):

   ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

---

5. Si consideri la funzione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy + 1$. Posto $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si calcoli

$$3L(\boldsymbol{v}) = \qquad\qquad L(3\boldsymbol{v}) =$$

---

6. Sia $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dire quali delle seguenti liste di vettori sono **generatori** del complemento ortogonale di Span(X):

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sì ◯ no ◯

---

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Stabilire per quale/i delle seguenti matrici N la matrice $N^{-1}AN$ è diagonale:

   ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

---

8. Sia

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Quali dei seguenti vettori sono autoettori di A relativi all'autovalore 2.

   ◯ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ◯ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
