CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	4 febbraio 2016
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri l'applicazione *lineare* $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \; L\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \; L\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \; L\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare le immagini degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^4$ tramite L:

   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} L$ rispetto alle coordinate canoniche:

---

2. **(6 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ e la retta r di equazioni $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta s passante per A con direzione $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$:

   (c) il punto P di intersezione della retta r e della retta s:

   (d) la distanza d del punto P dal piano π:

---

3. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+h & h \\ 0 & 1-h & 0 \\ h & 2 & -h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A e di $\tilde{A} = (A|B)$ al variare di h:

(b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1:

(d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

4. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

(c) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

(d) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**4 febbraio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri l'applicazione *lineare* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$L\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-2\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare le immagini degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$ tramite L:

   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$:

---

2. **(6 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) Le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta s parallela a r e passante per C:

   (c) L'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e il punto C

   (d) La distanza d tra il punto $P = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ e il piano π:

---

3. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2+h & 1 & 1+h \\ 2 & 1+h & -1-h \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+h \\ 2h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A e di $\tilde{A} = (A|B)$ al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione del sistema è unica

   (d) Posto $h = 0$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

4. **(6 pt)**

   Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

   (c) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

   (d) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**4 febbraio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri l'applicazione *lineare* $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \ L\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \ L\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \ L\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare le immagini degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^4$ tramite L:

   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$ rispetto alle coordinate canoniche:

---

2. **(6 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ e la retta r di equazioni $\begin{cases} y - z = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta s passante per C con direzione $\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$:

   (c) il punto P di intersezione della retta r e della retta s:

   (d) la distanza d del punto P dal piano π:

---

3. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2-2h & h-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-h \\ 2 & h-1 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-h \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A e di $\tilde{A} = (A|B)$ al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1:

   (d) Posto $h = 2$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

4. **(6 pt)**

   Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

   (c) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

   (d) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**4 febbraio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri l'applicazione *lineare* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$L\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \; L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \; L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare le immagini degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$ tramite L:

   (b) Determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e di $\operatorname{Ker} L$:

   (c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$:

---

2. **(6 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) Le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta s parallela a r e passante per C:

   (c) L'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e il punto C

   (d) La distanza d tra il punto $P = \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$ e il piano π:

---

3. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2-2h & 0 \\ 2h-1 & 2h & -2 \\ 1-2h & 2 & 2-4h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2h \\ 1-4h \\ 4h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A e di $\tilde{A} = (A|B)$ al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione del sistema è unica

   (d) Posto $h = \frac{1}{2}$, determinare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

4. **(6 pt)**

   Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

   (c) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

   (d) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).
