Geometria e Algebra Appello dell'8 luglio 2016

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola.

Cognome e Nome:

....

....

Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Punteggi negativi possono essere attribuiti a risposte gravemente *errate.*

Domanda 1 Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (t^2+4)(2-t)$, È possibile conoscere la traccia di A e decidere se A è diagonalizzabile o non diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

☐ w ☐ p ☐ a ☐ c

....

....

....

....

....

....

Domanda 2 Si consideri la forma quadratica $q(x, y, z) = 2x^2 - 2yz + 2y^2 + 2z^2$. Si stabilisca il segno di q.

☐ definita negativa ☐ semidefinita positiva ☐ semidefinita negativa
☐ definita positiva ☐ non definita

Domanda 3 Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ un'applicazione lineare. Sapendo che $\dim \operatorname{Im} L = 4$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

☐ L non è né suriettiva, né iniettiva. ☐ L è biunivoca.
☐ L è iniettiva, ma non suriettiva. ☐ L è suriettiva, ma non iniettiva.

Domanda 4 Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 4$ e $\dim V = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è **sempre** vera?

- ☐ V è sottoinsieme di U.
- ☐ $U + V = \mathbb{R}^5$.
- ☐ $\dim U \cap V \leq 2$.
- ☐ U e V sono in somma diretta.

Domanda 5 ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3. Sapendo che 2 e 5 sono autovalori di A, e che per l'autospazio $V_5 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- ☐ $V_2 = \text{Span}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.
- ☐ La matrice A è diagonalizzabile.
- ☐ Non esistono 3 autovettori di A ortogonali tra loro.
- ☐ $V_2 = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x + y + z = 0\}$.

Domanda 6 ♣ Sia $\boldsymbol{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una funzione generica (non necessariamente lineare). Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera:

- ☐ se $\boldsymbol{f}$ è lineare e $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti allora $\boldsymbol{f}$ è iniettiva.
- ☐ se $\boldsymbol{f}$ è lineare allora $\boldsymbol{f}$ non può essere suriettiva
- ☐ $\text{Im}\, \boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3\}$.
- ☐ anche se $\boldsymbol{f}$ non è suriettiva esiste sempre un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$.

Domanda 7 Si dimostri che se il sistema $AX = B$ ammette un'unica soluzione allora $\text{Ker}\, A = \{\boldsymbol{0}\}$.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ☐ **c**

....

....

....

....

....

....

....

Domanda 8 ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

- ☐ $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & 1 & 0\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\-1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$