



Geometria e Algebra

Appello dell'8 luglio 2016

0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9

← annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola.

Cognome e Nome:

.....

.....

Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Punteggi negativi possono essere attribuiti a risposte gravemente errate.

Domanda 1 Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 . Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (t^2 + 4)(2 - t)$, È possibile conoscere la traccia di A e decidere se A è diagonalizzabile o non diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

w p a c

.....

.....

.....

.....

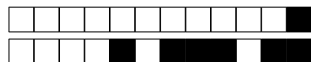
.....

Domanda 2 Si consideri la forma quadratica $q(x, y, z) = 2x^2 - 2yz + 2y^2 + 2z^2$. Si stabilisca il segno di q .

definita negativa semidefinita positiva semidefinita negativa
 definita positiva non definita

Domanda 3 Sia $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ un'applicazione lineare. Sapendo che $\dim \text{Im } L = 4$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

L non è né suriettiva, né iniettiva. L è biunivoca.
 L è iniettiva, ma non suriettiva. L è suriettiva, ma non iniettiva.



Domanda 4 Siano U e V sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^5 ; sia $\dim U = 4$ e $\dim V = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è **sempre** vera?

- V è sottoinsieme di U .
- $U + V = \mathbb{R}^5$.
- $\dim U \cap V \leq 2$.
- U e V sono in somma diretta.

Domanda 5 ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3 . Sapendo che 2 e 5 sono autovalori di A , e che per l'autospazio $V_5 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- $V_2 = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- La matrice A è diagonalizzabile.
- Non esistono 3 autovettori di A ortogonali tra loro.
- $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\}$.

Domanda 6 ♣ Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione generica (non necessariamente lineare). Stabilire quali tra le seguenti affermazioni è vera:

- se f è lineare e $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti allora f è iniettiva.
- se f è lineare allora f non può essere suriettiva.
- $\text{Im } f = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = w, w \in \mathbb{R}^3\}$.
- anche se f non è suriettiva esiste sempre un vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(v) = 0$.

Domanda 7 Si dimostri che se il sistema $AX = B$ ammette un'unica soluzione allora $\text{Ker } A = \{0\}$.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda 8 ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$