CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	8 luglio 2016
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice simmetrica $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Si stabilisca se 1 è autovalore di Q motivando la risposta

   (b) Si determinino tutti gli autovalori di Q determinando le molteplicità algebriche e geometriche e una base *ortogonale* di ciascun autospazio.

   (c) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $X \neq 0$ soluzione dell' equazione $X^T Q X = 0$.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -2+2h & 1 & 1-h \\ -13 & 2+h & 3 \\ -6h & 0 & 2h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2-h \\ 3h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 0:

   (d) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e il vettore $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} - 2\hat{\boldsymbol{k}}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ che passa per A.

   (b) Rappresentare in forma *cartesiana* la retta r parallela a $\boldsymbol{v}$ e passante per B.

   (c) Si determini l'intersezione di π e di r

   (d) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.

---

4. **(6 pt)** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x + y - z + t = 0 \}.$$

   (a) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

   (b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U + V)$.

   (c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 luglio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice simmetrica $Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Si stabilisca se 0 è autovalore di Q motivando la risposta

   (b) Si determinino tutti gli autovalori di Q determinando le molteplicità algebriche e geometriche e una base *ortogonale* di ciascun autospazio.

   (c) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $X \neq 0$ soluzione dell' equazione $X^T Q X = 0$.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+2h & -1-h \\ 4+h & -13 & 3 \\ 0 & -6-3h & 2+h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3+h \\ 2+h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1:

   (d) Sia $h = -1$. Determinare le soluzioni del sistema.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e il vettore $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ che passa per A.

   (b) Rappresentare in forma *cartesiana* la retta r parallela a $\boldsymbol{v}$ e passante per B.

   (c) Si determini l'intersezione di π e di r

   (d) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.

---

4. **(6 pt)** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : 2x + y + z + t = 0 \}.$$

   (a) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

   (b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U + V)$.

   (c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	8 luglio 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice simmetrica $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Si stabilisca se 0 è autovalore di Q motivando la risposta

   (b) Si determinino tutti gli autovalori di Q determinando le molteplicità algebriche e geometriche e una base *ortogonale* di ciascun autospazio.

   (c) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $X \neq 0$ soluzione dell' equazione $X^T Q X = 0$.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 3 & -2+2h \\ -8+2h & 4-h & 2 \\ 9-3h & h-3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5-h \\ -2 \\ h-3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 0:

   (d) Sia $h = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O,\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}},\hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, e il vettore $\boldsymbol{v}=2\hat{\boldsymbol{\imath}}-\hat{\boldsymbol{\jmath}}-\hat{\boldsymbol{k}}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ che passa per A.

   (b) Rappresentare in forma *cartesiana* la retta r parallela a $\boldsymbol{v}$ e passante per B.

   (c) Si determini l'intersezione di π e di r

   (d) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.

---

4. **(6 pt)** Sia $V\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

   Sia $U\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U:=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}:x+y-z-t=0\}.$$

   (a) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

   (b) Determinare $\dim U\cap V$ e $\dim(U+V)$.

   (c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 luglio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice simmetrica $Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Si stabilisca se -2 è autovalore di Q motivando la risposta

   (b) Si determinino tutti gli autovalori di Q determinando le molteplicità algebriche e geometriche e una base *ortogonale* di ciascun autospazio.

   (c) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $X \neq 0$ soluzione dell' equazione $X^T Q X = 0$.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & h+4 & -8-2h \\ 2+2h & 3 & -13 \\ 0 & -h-3 & 3h+9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+h \\ 3+h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1:

   (d) Sia $h = -4$. Determinare le soluzioni del sistema.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, e il vettore $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} - 2\hat{\boldsymbol{k}}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ che passa per A.

   (b) Rappresentare in forma *cartesiana* la retta r parallela a $\boldsymbol{v}$ e passante per B.

   (c) Si determini l'intersezione di π e di r

   (d) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.

---

4. **(6 pt)** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

   Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U := \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} : x - y + z + 2t = 0\}.$$

   (a) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

   (b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U + V)$.

   (c) Determinare una base di $V^{\perp}$.
