Geometria e Algebra Appello del 22 settembre 2016

□ **0**	□ **0**	□ **0**	□ **0**	□ **0**	□ **0**
□ **1**	□ **1**	□ **1**	□ **1**	□ **1**	□ **1**
□ **2**	□ **2**	□ **2**	□ **2**	□ **2**	□ **2**
□ **3**	□ **3**	□ **3**	□ **3**	□ **3**	□ **3**
□ **4**	□ **4**	□ **4**	□ **4**	□ **4**	□ **4**
□ **5**	□ **5**	□ **5**	□ **5**	□ **5**	□ **5**
□ **6**	□ **6**	□ **6**	□ **6**	□ **6**	□ **6**
□ **7**	□ **7**	□ **7**	□ **7**	□ **7**	□ **7**
□ **8**	□ **8**	□ **8**	□ **8**	□ **8**	□ **8**
□ **9**	□ **9**	□ **9**	□ **9**	□ **9**	□ **9**

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`matriciA`] ♣ Sia A una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -2$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\det A^{\mathrm{T}} = -2$. ■ $\det A^3 = -8$. □ $\det 2A = -4$. □ $\det A^{-1} = \frac{1}{2}$.

Domanda [`matriciB`] ♣ Sia A una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -3$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

□ $\det A^{\mathrm{T}} = 3$. □ $\det A^3 = -9$. ■ $\det 2A = -24$. □ $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$.

Domanda [`matriciC`] ♣ Sia A una matrice quadrata 2×2; sapendo che $\det A = -3$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\det A^{\mathrm{T}} = -3$. ■ $\det(-A) = -3$. □ $\det 2A = -6$. ■ $\det A^{-1} = -\frac{1}{3}$.

Domanda [`matriciD`] ♣ Sia A una matrice quadrata 2×2; sapendo che $\det A = -2$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

□ $\det A^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}$. □ $\det(-A) = 2$. ■ $\det 2A = -8$. ■ $\det A^{-1} = -\frac{1}{2}$.

Domanda [`coodivettoreA`] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$. Allora

□ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}10/13\\-21/13\\14/13\end{pmatrix}$. ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1\\-9\\-2\end{pmatrix}$. □ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$. □ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.

Domanda [`coodivettoreB`] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{B} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. Allora

□ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-5/13\\17/13\\-7/13\end{pmatrix}$. ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}4\\11\\6\end{pmatrix}$. □ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}7\\11\\-6\end{pmatrix}$. □ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Domanda [`coodivettoreC`] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Allora

□ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1/13 \\ 19/13 \\ -17/13 \end{pmatrix}$. ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. □ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. □ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Domanda [`coodivettoreD`] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Allora

□ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4/13 \\ 15/13 \\ -10/13 \end{pmatrix}$. ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$. □ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. □ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Domanda [`openquestdefinvarA`] Dare la **definizione** di matrice quadrata $n \times n$ diagonalizzabile.

□**w** □**p** □**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdefinvarB`] Sia A una matrice $n \times n$. Dare la **definizione** di autovettore di A.

□**w** □**p** □**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdefinvarC`] **Definire** il rango di una matrice A. ☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdefinvarD`] Dare la **definizione** di matrice invertibile. ☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdeflingenA`] Dati vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ in $\mathbb{R}^3$, cosa significa che essi sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$? ☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdeflingenB`] Dati vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ in $\mathbb{R}^3$, cosa significa che essi sono linearmente indipendenti?

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdeflingenC`] Dati vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ in $\mathbb{R}^3$, cosa significa che essi sono linearmente dipendenti?

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdeflingenD`] Dati vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ in $\mathbb{R}^3$, cosa significa che essi non generano $\mathbb{R}^3$?

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

Domanda [`linearappA`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare; sia $\operatorname{Im} L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = x - y = 0 \}$. Allora

- ☐ L è biunivoca.
- ☐ L è suriettiva, ma non iniettiva.
- ☐ L è iniettiva, ma non suriettiva.
- ■ L non è né iniettiva, né suriettiva.

Domanda [`linearappB`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare e tale che $\operatorname{Im} L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \}$. Allora

- ☐ L è biunivoca.
- ☐ L è suriettiva, ma non iniettiva.
- ■ L è iniettiva, ma non suriettiva.
- ☐ L non è né iniettiva, né suriettiva.

Domanda [linearappC] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare e tale che $\operatorname{Ker} L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = x - y = 0\}$. Allora

- ☐ L è biunivoca.
- ☐ L è iniettiva, ma non suriettiva.
- ■ L è suriettiva, ma non iniettiva.
- ☐ L non è né iniettiva, né suriettiva.

Domanda [linearappD] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare e tale che $\operatorname{Ker} L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$. Allora

- ☐ L è biunivoca.
- ☐ L è iniettiva, ma non suriettiva.
- ☐ L è suriettiva, ma non iniettiva.
- ■ L non è né iniettiva, né suriettiva.

Domanda [linindipA] ♣ Sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$. Allora

- ■ $\{\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- ☐ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2\}$ non sono linearmente indipendenti.
- ☐ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- ■ $\{-7\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Domanda [linindipB] ♣ Sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$. Allora

- ■ $\operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \mathbb{R}^3$.
- ☐ $\{\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ non è una base di $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Esiste $\boldsymbol{v}_4$ che non è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.
- ■ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ è necessariamente un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Domanda [linindipC] ♣ Sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Allora

- ■ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- ■ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$.
- ■ Per ogni $\boldsymbol{u}$ di $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$.
- ☐ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ è necessariamente un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Domanda [linindipD] ♣ Sia $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Allora

- ☐ $\{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$.
- ■ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_4\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$.
- ■ Esiste un vettore di $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ che è combinazione lineare degli altri.
- ■ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ è necessariamente un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Domanda [diagA] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Stabilire quali fra i seguenti vettori sono autovettori per A.

☐ $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Domanda [diagB] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Stabilire quali fra i seguenti vettori sono autovettori per A.

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Domanda [diagC] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Stabilire quali fra i seguenti vettori sono autovettori per A.

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Domanda [diagD] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Stabilire quali fra i seguenti vettori sono autovettori per A.

■ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Domanda [spanA] ♣ Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determini quali fra le seguenti affermazioni sono vere

- ■ Se $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ allora $x + y + z = 0$.
- ☐ Tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ appartengono a $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.
- ■ Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.
- ☐ $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ contiene solamente 2 vettori.

Domanda [spanB] ♣ Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determini quali fra le seguenti affermazioni sono vere

- ■ $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ corrisponde a un piano passante per l'origine.
- ☐ $\boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1)$.
- ■ Se $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ allora $x = y$.
- ■ $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

Domanda [spanC] ♣ Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determini quali fra le seguenti affermazioni sono vere

- ■ È possibile decomporre in un unico modo il vettore $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$.
- ☐ $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \mathbb{R}^2$.
- ☐ $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ contiene solamente 2 vettori.
- ■ Esiste almeno un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ che non appartiene a $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$.

Domanda [`spanD`] ♣ Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si determini quali fra le seguenti affermazioni sono vere

- ☐ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ è una base di $\operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.
- ☐ $\operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ contiene solamente 2 vettori.
- ■ Esistono infiniti modi di rappresentare $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$.