CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	22 settembre 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(6 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

   (c) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

   (d) A e B sono simili? Motivare la risposta.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h+4 & h & -1 \\ 0 & h+4 & 2h+8 \\ 2h+8 & 4-h & h+6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 2+h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h il sistema ammette un'unica soluzione:

   (d) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π passante per A, B e C.

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per B ortogonale al piano π.

   (c) Si determini la posizione reciproca delle retta r e la retta s passante per A e C.

   (d) Si determini la distanza di C dalla retta r.

---

4. **(6 pt)** Sia $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \right\}$.

   (a) Determinare la dimensione di U e trovarne una base <u>ortogonale</u>:

   (b) Determinare una base di $U^\perp$:

   (c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sui sottospazi U e $U^\perp$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	22 settembre 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(6 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (b) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (c) Esiste una base <u>ortonormale</u> di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

   (d) A e B sono simili? Motivare la risposta.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h-1 & h+3 & -1 \\ h+3 & 0 & 2h+6 \\ 5-h & 2h+6 & h+5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h-1 \\ 1+h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h il sistema ammette un'unica soluzione:

   (d) Sia $h = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π passante per A, B e C.

   (b) Detto σ il piano passante per A e ortogonale al vettore $OB - OA$, si determini un'equazione cartesiana di σ.

   (c) Detta r la retta $\sigma \cap \pi$ e s la retta passante per B e C, si determini la posizione reciproca di r e s.

   (d) Si determini la distanza di C dalla retta r.

---

4. **(6 pt)** Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 3y + z = 6x - 4z = 0 \right\}$.

   (a) Determinare la dimensione di W e trovarne una base <u>ortonormale</u>:

   (b) Determinare una base <u>ortogonale</u> di $W^{\perp}$:

   (c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sui sottospazi W e $W^{\perp}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 settembre 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

   (c) Esiste una base <u>ortogonale</u> di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

   (d) A e B sono simili? Motivare la risposta.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h+2 & -1 & h-2 \\ 0 & 2h+4 & h+2 \\ 2h+4 & h+4 & 6-h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h-2 \\ h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h il sistema ammette un'unica soluzione:

   (d) Sia $h = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π passante per A, B e C.

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per B ortogonale al piano π.

   (c) Si determini la posizione reciproca delle retta r e la retta s passante per A e C.

   (d) Si determini la distanza di C dalla retta r.

---

4. **(6 pt)** Sia $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - 2z = 0 \right\}$

   (a) Determinare la dimensione di U e trovarne una base ortogonale:

   (b) Determinare una base di $U^\perp$:

   (c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ sui sottospazi U e $U^\perp$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	22 settembre 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(6 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (b) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (c) Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

   (d) A e B sono simili? Motivare la risposta.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & h-3 & h+1 \\ 2h+2 & h+1 & 0 \\ h+3 & 7-h & 2h+2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h-3 \\ h-1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h il sistema ammette un'unica soluzione:

   (d) Sia $h = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π passante per A, B e C.

   (b) Detto σ il piano passante per A e ortogonale al vettore $OC - OA$, si determini un'equazione cartesiana di σ.

   (c) Detta r la retta $\sigma \cap \pi$ e s la retta passante per B e C, si determini la posizione reciproca di r e s.

   (d) Si determini la distanza di B dalla retta r.

---

4. **(6 pt)** Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -4x + 3y + 2z = x + z = 2x - y = 0 \right\}$.

   (a) Determinare la dimensione di W e trovarne una base <u>ortonormale</u>:

   (b) Determinare una base <u>ortogonale</u> di $W^\perp$:

   (c) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sui sottospazi W e $W^\perp$:
