Geometria e Algebra Appello del 9 febbraio 2017

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`openquestsistemicA`] Data una matrice A con k righe ed n colonne definire $\operatorname{Ker} A$. Quindi dare un esempio di una matrice 3×2 con $\dim \operatorname{Ker} A = 1$.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestsistemicB`] Data una matrice A con k righe ed n colonne definire $\operatorname{Ker} A$. Quindi dare un esempio di una matrice 4×3 con $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [openquestsistemicC] Enunciare il teorema sulla risolubilità dei sistemi lineari. Quindi dare un esempio di un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite senza soluzioni.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [openquestsistemicD] Enunciare il teorema sulla risolubilità dei sistemi lineari. Quindi dare un esempio di un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite con almeno due soluzioni.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [opendefeigenVA] Dare la definizione di autospazio di un operatore lineare $L\colon V \to V$ relativo a un autovalore λ. Si dia un esempio di una matrice 3×3 per cui la somma delle dimensioni degli autospazi sia 2.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendefeigenVB`] Dare la definizione di molteplicità geometrica di un autovalore di un operatore lineare $L\colon V \to V$. Costruire un esempio di una matrice 3×3 con autovalore 0 e tale che $V_0 = \{z = 0\}$.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`opendefeigenVC`] Sia A una matrice 3×3. Dare la definizione di autospazio di A relativo a un autovalore λ. Dimostrare che se $\mathrm{Ker}(A - 2I) \neq \{\mathbf{0}\}$ allora 2 è un autovalore di A.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`opendefeigenVD`] Dare la definizione di autovalore di un operatore lineare $L : V \to V$. Costruire un esempio di una matrice 2×2 con autovalori 1 e 2 e non diagonale.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [geom3dA] ♣ Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Dati $\boldsymbol{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{\boldsymbol{k}}$ e $\boldsymbol{v} = \hat{\jmath} - \hat{\boldsymbol{k}}$, quali dei seguenti punti appartengono a $\pi = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$?

■ $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Domanda [geom3dB] ♣ Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Dati $\boldsymbol{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\boldsymbol{k}}$ e $\boldsymbol{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{\boldsymbol{k}}$, quali dei seguenti punti appartengono a $\pi = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$?

■ $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

Domanda [geom3dC] ♣ Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Dati $\boldsymbol{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{\boldsymbol{k}}$ e il punto $P = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, quali dei seguenti punti appartengono a $r = P + \operatorname{Span}(\boldsymbol{u})$?

■ $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$

Domanda [geom3dD] ♣ Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Dati $\boldsymbol{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{\boldsymbol{k}}$ e il punto $P = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, quali dei seguenti punti appartengono a $r = P + \operatorname{Span}(\boldsymbol{u})$?

■ $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}-4\\-6\\2\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$

Domanda [grassmannA] ♣ Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$ con $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono *necessariamente* vere?

□ $U \oplus W = \mathbb{R}^8$.
□ $\dim(U + W) \leq 5$.
■ $\dim U \cap W \leq 3$.
■ Se $U \subset W$, allora $\dim(U + W) = 5$.

Domanda [grassmannB] ♣ Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$ con $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono *necessariamente* vere?

□ U e W sono in somma diretta.
■ $\dim(U + W) \geq 3$.
■ $\dim U \cap W \geq 1$.
□ Se $U + W = \mathbb{R}^7$, allora $\dim(U \cap W) > 1$.

Domanda [grassmannC] ♣ Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$ con $\dim U = 2$ e $\dim W = 5$. Quali delle seguenti affermazioni sono *necessariamente* vere?

□ U e W sono in somma diretta.
□ $\dim(U + W) = 7$.
□ $\dim U \cap W \leq 1$.
■ Se $\dim(U \cap W) = 2$ allora $U + W = W$.

Domanda [grassmannD] ♣ Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$ con $\dim U = 3$ e $\dim W = 4$. Quali delle seguenti affermazioni sono *necessariamente* vere?

■ Se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, $U + W = \mathbb{R}^7$.
□ $\dim(U + W) \leq 3$.
■ $\dim U \cap W \leq 3$.
■ Se $\dim(U + W) = 4$, allora $U \subset W$.

Domanda [`linappcA`] Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare *suriettiva* tale che $L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- ☐ $\dim \operatorname{Ker} L > 0$.
- ☐ L è l'applicazione identica di $\mathbb{R}^3$.
- ■ $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
- ☐ $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Domanda [`linappcB`] Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $\operatorname{Im} L = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x+y+z = 0\}$. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- ☐ $\dim \operatorname{Ker} L = 2$.
- ☐ Esiste $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $L(X) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
- ■ Esiste $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $L(X) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
- ☐ L è iniettiva.

Domanda [`linappcC`] Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare *iniettiva* tale che $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- ☐ L non è suriettiva.
- ☐ $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
- ■ Esiste $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $L(X) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
- ☐ $\dim \operatorname{Ker} L = 3$.

Domanda [`linappcD`] Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $\operatorname{Ker} L = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x + z = 0\}$. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- ☐ $\dim \operatorname{Im} L = 2$.
- ■ L non è suriettiva.
- ☐ $L\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
- ☐ $L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Domanda [`VorthogA`] ♣ Sia $V = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = x - t = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

■ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-2\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Domanda [`VorthogB`] ♣ Sia $V = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - t = x + z = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

■ $\begin{pmatrix}2\\4\\0\\-2\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$

Domanda [VorthogC] ♣ Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, y + z - t = x - 2t = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

■ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [VorthogD] ♣ Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y - t = z + t = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

■ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Domanda [spectralcA] ♣ Sia A una matrice quadrata **simmetrica** 3×3. Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A, e che $V_4 = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

□ $\dim \operatorname{Ker}(A + 3I) = 1$.
■ A è diagonalizzabile.
■ $V_{-3} = V_4^\perp$.
□ $\det A = -48$.

Domanda [spectralcB] ♣ Sia A una matrice quadrata **simmetrica** 3×3. Sapendo che 1 e 5 sono gli *unici* autovalori reali di A, e che $V_1 = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

□ A non è diagonalizzabile.
■ $\dim \operatorname{Ker}(A - 5I) = 2$.
■ $\det A = 25$.
■ $V_1 + V_5 = \mathbb{R}^3$.

Domanda [spectralcC] ♣ Sia A una matrice quadrata **simmetrica** 3×3. Sapendo che 0, 2 e 5 sono autovalori di A, stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

□ $\dim V_2 = 2$.
□ $\det A = 10$.
□ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
■ $\dim \operatorname{Ker} A = 1$.

Domanda [spectralcD] ♣ Sia A una matrice quadrata **simmetrica** 3×3. Sapendo che 1, 2 e 5 sono autovalori di A, stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

■ $\dim V_2 = 1$.
■ $\det A = 10$.
□ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
□ $\dim \operatorname{Ker} A = 1$.

Domanda [invdiagA] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è

■ invertibile, ma non diagonalizzabile.
□ non invertibile e non diagonalizzabile.
□ non invertibile, ma diagonalizzabile.
□ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`invdiagB`] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è

- [ ] invertibile, ma non diagonalizzabile.
- [ ] non invertibile e non diagonalizzabile.
- [x] non invertibile, ma diagonalizzabile.
- [ ] invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`invdiagC`] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è

- [ ] invertibile, ma non diagonalizzabile.
- [ ] non invertibile e non diagonalizzabile.
- [ ] non invertibile, ma diagonalizzabile.
- [x] invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`invdiagD`] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è

- [ ] invertibile, ma non diagonalizzabile.
- [x] non invertibile e non diagonalizzabile.
- [ ] non invertibile, ma diagonalizzabile.
- [ ] invertibile e diagonalizzabile.