**Geometria e Algebra** Appello del 19 giugno 2017

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ☐**0** | ☐**0** | ☐**0** | ☐**0** | ☐**0** | ☐**0** |
| ☐**1** | ☐**1** | ☐**1** | ☐**1** | ☐**1** | ☐**1** |
| ☐**2** | ☐**2** | ☐**2** | ☐**2** | ☐**2** | ☐**2** |
| ☐**3** | ☐**3** | ☐**3** | ☐**3** | ☐**3** | ☐**3** |
| ☐**4** | ☐**4** | ☐**4** | ☐**4** | ☐**4** | ☐**4** |
| ☐**5** | ☐**5** | ☐**5** | ☐**5** | ☐**5** | ☐**5** |
| ☐**6** | ☐**6** | ☐**6** | ☐**6** | ☐**6** | ☐**6** |
| ☐**7** | ☐**7** | ☐**7** | ☐**7** | ☐**7** | ☐**7** |
| ☐**8** | ☐**8** | ☐**8** | ☐**8** | ☐**8** | ☐**8** |
| ☐**9** | ☐**9** | ☐**9** | ☐**9** | ☐**9** | ☐**9** |

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

..........................................................

..........................................................

---

**Domanda** [`openquestbasiA`] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale $V$. Fornire un esempio di una lista di generatori di $\mathbb{R}^4$ che non è formata da 4 vettori.

☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

**Domanda** [`openquestbasiB`] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale $V$. Fornire un esempio di una lista di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ che non è formata da 4 vettori.

☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

**Domanda** [`openquestbasiC`] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale $V$. Fornire un esempio di una lista formata da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ che non è una lista di generatori.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Domanda** [`openquestbasiD`] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale $V$. Fornire un esempio di una lista di 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ che non è linearmente indipendente.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Domanda** [`openquestlinappA`] Dare la **definizione** di funzione iniettiva *generale (non necessariamente lineare)*; fornire, quindi, un esempio esplicito di funzione **lineare** $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che **non sia** iniettiva.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Domanda** [`openquestlinappB`] Dare la **definizione** di funzione suriettiva *generale (non necessariamente lineare)*; fornire, quindi, un esempio esplicito di funzione **lineare** $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che **sia** suriettiva.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

**Domanda** [`openquestlinappC`] Dare la **definizione** di funzione iniettiva *generale (non necessariamente lineare)*; fornire, quindi, un esempio esplicito di funzione **lineare** $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che **sia** iniettiva.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

**Domanda** [`openquestlinappD`] Dare la **definizione** di funzione suriettiva *generale (non necessariamente lineare)*; fornire, quindi, un esempio esplicito di funzione **lineare** $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che **non sia** suriettiva.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

**Domanda** [simmA] ♣ Sia $A$ una matrice **simmetrica** $3 \times 3$. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente false, cioè sono in contraddizione con l'assunto su $A$:

- ■ Gli unici autovalori di $A$ sono 1 e 3 entrambi con molteplicità geometrica 1.
- ■ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 1 mentre $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2.
- □ $\det A = 0$.
- □ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$ relativi ad autovalori distinti.

**Domanda** [simmB] ♣ Sia $A$ una matrice **simmetrica** $3 \times 3$. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente false, cioè sono in contraddizione con l'assunto su $A$:

- □ Gli autovalori di $A$ sono 1 con molteplicità geometrica 2 e 3 con molteplicità geometrica 1
- ■ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 1 mentre $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2
- ■ $A^T$ non sia simmetrica
- □ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$ relativi ad autovalori distinti.

**Domanda** [simmC] ♣ Sia $A$ una matrice **simmetrica** $3 \times 3$. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente false, cioè sono in contraddizione con l'assunto su $A$:

- ■ Gli autovalori di $A$ sono 1 e 3 entrambi con molteplicità geometrica 2
- □ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 1 mentre $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2
- □ $\dim \operatorname{Im} A = 2$.
- ■ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$ relativi a 3 autovalori distinti.

**Domanda** [simmD] ♣ Sia $A$ una matrice **simmetrica** $3 \times 3$. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente false, cioè sono in contraddizione con l'assunto su $A$:

- ■ $A$ ha come unico autovalore 1 e $\operatorname{rg}(A - I) = 1$
- □ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 1 mentre $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2
- □ $\dim \operatorname{Ker} A = 2$
- ■ $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$ relativi a 3 autovalori distinti.

**Domanda** [determinanteabA] ♣ Siano $a$ e $b$ due numeri reali e sia $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ a & 0 & b\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- □ $\det A = a^2 - b$.
- ■ $\det A = a^2 - ab$.
- □ $A$ è invertibile per qualunque scelta di $a$ e $b$.
- ■ Se $a \neq 0$, $\operatorname{rank} A \geq 2$.

**Domanda** [`determinanteabB`] ♣ Siano $a$ e $b$ due numeri reali e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

■ $A$ è non invertibile per qualunque scelta di $a$ e $b$.

□ $A$ è invertibile per qualunque scelta di $a$ e $b$.

□ $\det A = a^2 - ab$.

■ Se $\operatorname{rank} A = 1$, allora $b = 0$.

**Domanda** [`determinanteabC`] ♣ Sia $x$ un numero reale e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 0 & x \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

□ Per qualunque scelta di $x$ la matrice $A$ è invertibile.

□ Per $x = 1$, $\operatorname{rank} A = 2$.

■ $\det A = -x^2$.

■ Se $x = 0$, $\operatorname{rank} A = 2$.

**Domanda** [`determinanteabD`] ♣ Sia $x$ un numero reale e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & x & x \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

■ La matrice $A$ è invertibile solo se $x \neq 0$.

□ Per $x = 1$, $\operatorname{rank} A = 2$.

□ $\det A = x^2$.

■ Se $x = 0$, $\operatorname{rank} A = 2$.

**Domanda** [`linsurinjA`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è *sempre* vera, sapendo che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$:

■ $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

□ $\dim \operatorname{Ker} L = 1$.

■ $\operatorname{Span}(\boldsymbol{e}_1) \subset \operatorname{Ker} L$.

□ $L$ è suriettiva.

**Domanda** [`linsurinjB`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è *sempre* vera, sapendo che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$:

■ $L(\boldsymbol{e}_1) = \mathbf{0}$.

■ $\dim \operatorname{Ker} L \geq 1$.

□ $\operatorname{Im} L = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

■ $L$ non è suriettiva.

**Domanda** [`linsurinjC`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è *sempre* vera, sapendo che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

■ $\mathbf{0} \in \operatorname{Im} L$.

□ $\dim \operatorname{Im} L = 2$.

■ $\operatorname{Span}(\boldsymbol{e}_2) \subset \operatorname{Im} L$.

□ $L$ è iniettiva.

**Domanda** [`linsurinjD`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è *sempre* vera, sapendo che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

□ $L(\boldsymbol{e}_2) = \mathbf{0}$.

□ $\boldsymbol{e}_3 \in \operatorname{Ker} L$.

■ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$.

□ $L$ non è suriettiva.

**Domanda** [`orthbasisA`] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}9\\-1\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}3/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$

**Domanda** [`orthbasisB`] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}5/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}5/3\\1/3\\0\end{pmatrix}$

**Domanda** [`orthbasisC`] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}4/\sqrt{2}\\0\\3/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

**Domanda** [`orthbasisD`] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}3/\sqrt{6}\\0\\5/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}1/2\\0\\5/2\end{pmatrix}$

**Domanda** [`prodottoscalA`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vettori di $\mathbb{E}^3_O$. Quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere?

☐ Se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle < \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$, allora $\|\boldsymbol{v}\| < \|\boldsymbol{w}\|$.
■ $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.
☐ $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \leq \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$.
■ $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| \geq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\|$

**Domanda** [`prodottoscalB`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vettori di $\mathbb{E}^3_O$. Quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere?

☐ Se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$, allora $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{w}\|$.
☐ $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.
☐ $\frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle} = \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{w}\|}$.
■ $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$

**Domanda** [`prodottoscalC`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vettori di $\mathbb{E}^3_O$. Quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere?

☐ Se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle < \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$, allora $\|\boldsymbol{v}\| < \|\boldsymbol{w}\|$.
■ $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.
☐ $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\|$
■ $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{w}\|$

**Domanda** [`prodottoscalD`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vettori di $\mathbb{E}^3_O$. Quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere?

- □ Se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ e $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle > 0$, allora $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.
- ■ $\|\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 4\|\boldsymbol{v}\|^2 - 4\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.
- ■ $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$.
- ■ $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$

**Domanda** [`UorthbasisA`] ♣ Sia $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y + z = y - 2t = 0\}$. Quali fra le seguenti sono basi **ortogonali** di $U$?

- ■ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- □ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- □ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.
- □ $\{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.

**Domanda** [`UorthbasisB`] ♣ Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix})$. Quali fra le seguenti sono basi di $U^\perp$?

- □ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- □ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- ■ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.
- ■ $\{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.

**Domanda** [`UorthbasisC`] ♣ Sia $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + 2y = y - z - t = 0\}$. Quali fra le seguenti sono basi **ortogonali** di $U$?

- ■ $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- □ $\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
- ■ $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
- □ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

**Domanda** [`UorthbasisD`] ♣ Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$. Quali fra le seguenti sono basi di $U^\perp$?

- □ $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- ■ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
- ■ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\}$.
- ■ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.