CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h & 2 \\ 1-h & 2h & 1-2h \\ 1+h & -h & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2h+2 \\ 1 \\ 1+h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione esiste ed è unica:

   (d) Sia $h = 0$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

---

2. **(8pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 3t^2 + 2xy$.

   (a) Scrivere la matrice associata a q.

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di q.

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Determininare tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+h & 1-h \\ h & 2h & -h \\ 0 & 2-h & h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2h \\ 6+h \\ h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà soluzione ha dimensione 1:

   (d) Sia $h = 3$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

---

2. **(8pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = 2x^2 + 5y^2 + z^2 - 3t^2 + 4xy$.

   (a) Scrivere la matrice associata a q.

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di q.

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 3-h & 2h-6 & 4-h \\ 0 & h-3 & 2 \\ 3-h & 3-h & h-2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2h-4 \\ h-2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione esiste ed è unica:

   (d) Sia $h = 3$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

---

2. **(8pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2tz$.

   (a) Scrivere la matrice associata a q.

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di q.

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Determininare tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6-h & h-2 \\ h-6 & h-6 & 12-2h \\ -4 & h-4 & 8-h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1+h \\ 3-2h \\ 2-3h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà soluzione ha dimensione 1:

   (d) Sia $h = 0$. Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni:

---

2. **(8pt)** Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = -3x^2 - y^2 - z^2 - 4t^2 - 4tz$.

   (a) Scrivere la matrice associata a q.

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

   (d) Discutere il segno di q.

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.