

Geometria e Algebra Appello del 7 luglio 2017

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

.....

.....

Domanda [openspanA] Assegnati i vettori u_1, u_2, u_3 in uno spazio vettoriale reale \mathcal{V} , dare la **definizione** di $S = \text{Span}(u_1, u_2, u_3)$ e mostrare che S è un sottospazio vettoriale di \mathcal{V} .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openspanB] Dare la **definizione** di sottospazio di uno spazio vettoriale \mathcal{V} . Dato un sistema lineare di k equazioni in n incognite, $AX = B$, quando l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di \mathbb{R}^n ?

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [opensubspA] Siano $U, W \subset \mathcal{V}$ sottospazi vettoriali di \mathcal{V} . Dare la **definizione** di sottospazio vettoriale e mostrare che $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di \mathcal{V} . w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [opensubspB] Siano $U, W \subset \mathcal{V}$ sottospazi vettoriali di \mathcal{V} . Cosa significa che U e W sono in somma diretta? Fornire un esempio di due sottospazi U, W di \mathbb{E}_O^3 che sono in somma diretta. w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestautoA] Dare la **definizione** di autospazio di una matrice A relativo a un autovalore λ . Dare un esempio di una matrice 3×3 non diagonale, che abbia 1 come autovalore. w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestautoB] Dare la **definizione** di autospazio di una matrice A relativo a un autovalore λ . Dare un esempio di una matrice 3×3 non diagonale, che abbia 0 come autovalore.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestautoC] Dare la **definizione** di autovettore di una matrice. Quindi dare un esempio di una matrice 3×3 non diagonale, tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia autovettore di A .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestautoD] Dare la **definizione** di autovettore di una matrice. Quindi dare un esempio di una matrice 3×3 non diagonale, tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore di A .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [ortA] ♣ Sia $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ una base **ortogonale** di \mathbb{R}^3 .

Si determini quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a \mathcal{B} sono $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene al complemento ortogonale di $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
- $\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2$.

Domanda [ortB] ♣ Sia $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ una base **ortogonale** di \mathbb{R}^3 .

Si determini quali delle seguenti affermazioni sono corrette

- Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a \mathcal{B} sono $\begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/21 \\ 9/126 \end{pmatrix}$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\text{Span}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartiene al complemento ortogonale di $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$.
- $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle = \|\mathbf{v}_1\|^2 - \|\mathbf{v}_2\|^2$.

Domanda [ortC] ♣ Sia $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ una base **ortogonale** di \mathbb{R}^3 .

Si determini quali delle seguenti affermazioni sono corrette

- Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a \mathcal{B} sono $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene al complemento ortogonale di $\text{Span}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
- $\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 - \|\mathbf{v}_3\|^2$.

Domanda [ortD] ♣ Sia $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ una base **ortogonale** di \mathbb{R}^3 .

Si determini quali delle seguenti affermazioni sono corrette

- Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a \mathcal{B} sono $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/6 \\ 1/21 \\ -6/126 \end{pmatrix}$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartiene a $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene al complemento ortogonale di $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$.
- $\langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \|\mathbf{v}_1\|^2 - \|\mathbf{v}_3\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2$.

Domanda [quadfalga] Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^3 definita positiva:

- $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz$
 $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4yz$
 $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4yz$
 $q(x, y, z) = 2x^2 + z^2 + 2yz$

Domanda [quadfalgb] Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^3 semidefinita positiva:

- $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz$
 $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz$
 $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4yz$
 $q(x, y, z) = 2x^2 + z^2 + 2yz$

Domanda [quadfalgc] Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^3 definita negativa:

- $q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - 4xy - z^2$
 $q(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 + 2xy - 2z^2$
 $q(x, y, z) = -x^2 - 2xy - y^2 - z^2$
 $q(x, y, z) = -2y^2 - 2xy - z^2$

Domanda [quadfalgd] Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y, z)$ corrisponde a una forma quadratica in \mathbb{R}^3 semidefinita negativa:

- $q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - xy - z^2$
 $q(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 2yz$
 $q(x, y, z) = -x^2 + 2xy - y^2 - z^2$
 $q(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 4xy$

Domanda [rettapa] Sia $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Quale dei seguenti piani è ortogonale alla retta $r: x + y + z = x - 2z + 1 = 0$?

- $2x - 3y + z = 0$
 $x + y - 2z = 0$
 $2x + z = 0$
 $2x + y + z = 1$

Domanda [rettapb] Sia $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Quale dei seguenti piani è ortogonale alla retta $r: x + y - z = 2x + z - 1 = 0$?

- $x - 3y - 2z = 1$
 $x - y - 3z = 0$
 $x - 2z = 0$
 $x + y - 2z = 0$

Domanda [rettapc] Sia $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Quale dei seguenti piani è ortogonale alla retta $r: x + y - z - 2 = y + 2z = 0$?

- $3x - 2y + z = 0$
 $x + y + 2z = 0$
 $2y - z = 1$
 $x + 2y - z = 0$

Domanda [rettapd] Sia $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Quale dei seguenti piani è ortogonale alla retta $r: x + y + z + 2 = 2x - y = 0$?

- $x + 2y - 3z = 0$
 $x - 2y + z = 1$
 $x + 2y = 0$
 $x + 2y - z = 0$

Domanda [vspacegrassa] Siano U e W sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^7 ; sapendo che $\dim U = \dim W = 4$, determinare la dimensione minima di $U \cap W$:

- 0
 1
 2
 3
 5

Domanda [vspacegrassb] Siano U e W sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^8 ; sapendo che $\dim U = 4$ e $\dim W = 3$, determinare la dimensione minima di $U \cap W$:

- 0
 1
 2
 3
 4

Domanda [vspacegrassc] Siano U e W sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^5 ; sapendo che $\dim U = \dim W = 4$, determinare la dimensione minima di $U \cap W$:

- 0
 1
 2
 3
 5

Domanda [vspacegrassD] Siano U e W sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^{11} ; sapendo che $\dim U = 6$ e $\dim W = 7$, determinare la dimensione minima di $U \cap W$:

- 0 1 3 2 4

Domanda [basilusettaA] Sia $\mathcal{L} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una lista di generatori di uno spazio vettoriale V **di dimensione 2**. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- Per ogni $\mathbf{u} \in V$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{u}\}$ è ancora una lista di generatori di V . \mathbf{v}_4 è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
 \mathcal{L} è una base di V . Aggiungendo opportuni vettori ad \mathcal{L} si ottiene una base di V .

Domanda [basilusettaB] Sia $\mathcal{L} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una lista di generatori di uno spazio vettoriale V . Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- La lista \mathcal{L} non è linearmente indipendente. \mathbf{v}_4 è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
 \mathcal{L} è una base di V . $\dim V \leq 4$.

Domanda [basilusettaC] Sia $\mathcal{L} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una lista linearmente indipendente in uno spazio vettoriale V **di dimensione 5**. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- \mathcal{L} genera V . $\dim \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 3$.
 \mathcal{L} è una base di V . Si può estrarre da \mathcal{L} una base di V .

Domanda [basilusettaD] Sia $\mathcal{L} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una lista linearmente indipendente in uno spazio vettoriale V **di dimensione 5**. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- \mathcal{L} non è una lista di generatori di V . $\dim \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 4$.
 \mathcal{L} è una base di V . Si può estrarre da \mathcal{L} una base di V .

Domanda [spettlusettaA] Sia A una matrice 3×3 e siano $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettori relativi agli autovalori -3 e 7 . Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- A non è simmetrica. A è diagonalizzabile
 A non è diagonalizzabile. $\dim V_7 = 2$.

Domanda [spettlusettaB] Sia A una matrice **simmetrica** 3×3 con autovalori $-3, 2, 7$. Sapendo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{-3}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_7$, quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 A non è diagonalizzabile. $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \right\}$.

Domanda [spettlusettaC] Sia A una matrice **simmetrica** 3×3 con autovalori $1, 2, 3$. Sapendo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2$, quanto fa $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Domanda [spettlusetteD] Sia A una matrice **simmetrica** 3×3 con autovalori 1 e 2. Sapendo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1$, quanto fa $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.