

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>7 luglio 2017</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>
<b>Corso di Laurea:</b>	<b>Anno di corso:</b>

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & k+3 & k+3 \\ 4k-9 & 2k-3 & 4k-12 & 6k-15 \\ k-3 & 3 & -k & 3-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+3 \\ 6k-12 \\ k \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:
- (d) Sia  $k = 0$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. (8 pt) Sia  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  e il piano  $\pi: 2x - y - 3z = 1$  determinare:

- (a) una rappresentazione cartesiana della retta  $r = AB$ ;
- (b) il punto di intersezione  $H$  di  $r$  con  $\pi$ ;
- (c) una rappresentazione parametrica della retta  $s$  passante per  $H$  e ortogonale a  $\pi$ ;
- (d) la distanza di  $B$  da  $\pi$ .

3. Si considerino le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Determinare gli autovalori di  $A$  con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di  $A$ .

(c) Esiste una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $A$ ? Motivare la risposta.

(d)  $A$  e  $B$  sono simili? Motivare la risposta.

---

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>7 luglio 2017</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>
<b>Corso di Laurea:</b>	<b>Anno di corso:</b>

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & k-2 & 2k-2 \\ 4k-1 & 2k-1 & 4k & 2-4k \\ k & -1 & 1-k & 3-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k-1 \\ 2k-1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:
- (d) Sia  $k = 0$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. (8 pt) Sia  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e il piano  $\pi: 2x - 2y - z = 1$  determinare:

- (a) una rappresentazione cartesiana della retta  $r = AB$ ;
- (b) il punto di intersezione  $H$  di  $r$  con  $\pi$ ;
- (c) una rappresentazione parametrica della retta  $s$  passante per  $H$  e ortogonale a  $\pi$ ;
- (d) la distanza di  $B$  da  $\pi$ .

3. Si considerino le matrici  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Determinare gli autovalori di  $A$  con le relative molteplicità algebriche e geometriche:
  
  - (b) Determinare una base di ciascun autospazio di  $A$ .
  
  - (c) Esiste una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $A$ ? Motivare la risposta.
  
  - (d)  $A$  e  $B$  sono simili? Motivare la risposta.
-

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>7 luglio 2017</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>
<b>Corso di Laurea:</b>	<b>Anno di corso:</b>

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & k+3 & k-3 \\ 4k-9 & 2k-3 & 4k-12 & 9-4k \\ k-3 & 3 & -k & 3-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+3 \\ 3k-6 \\ 3k-6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:
- (d) Sia  $k = 0$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. (8 pt) Sia  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e il piano  $\pi: x + 3y - z = 1$  determinare:

- (a) una rappresentazione cartesiana della retta  $r = AB$ ;
- (b) il punto di intersezione  $H$  di  $r$  con  $\pi$ ;
- (c) una rappresentazione parametrica della retta  $s$  passante per  $H$  e ortogonale a  $\pi$ ;
- (d) la distanza di  $B$  da  $\pi$ .

3. Si considerino le matrici  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

(a) Determinare gli autovalori di  $A$  con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di  $A$ .

(c) Esiste una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $A$ ? Motivare la risposta.

(d)  $A$  e  $B$  sono simili? Motivare la risposta.

---

<b>CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA</b>	<b>7 luglio 2017</b>
<b>Cognome e Nome:</b>	<b>Matricola:</b>
<b>Corso di Laurea:</b>	<b>Anno di corso:</b>

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare  $AX = B$ , dove  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$  è il vettore delle incognite,  $A$  e  $B$  sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale  $k$ :

$$A = \begin{pmatrix} 4 - 7k & 2k & 3k + 4 & -4 - k \\ k - 4 & 0 & k - 4 & 4 - k \\ 3k & 4 - 2k & 4 - 3k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3k - 4 \\ 4 \\ 8 - 3k \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare di  $k$ :
- (b) Determinare per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di  $k$  lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:
- (d) Sia  $k = 0$ . Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. (8 pt) Sia  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio; assegnati i punti  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e il piano  $\pi: 3x + 2y + z = 1$  determinare:

- (a) una rappresentazione cartesiana della retta  $r = AB$ ;
- (b) il punto di intersezione  $H$  di  $r$  con  $\pi$ ;
- (c) una rappresentazione parametrica della retta  $s$  passante per  $H$  e ortogonale a  $\pi$ ;
- (d) la distanza di  $B$  da  $\pi$ .

3. (6 pt) Si considerino le matrici  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Determinare gli autovalori di  $A$  con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

(b) Determinare una base di ciascun autospazio di  $A$ .

(c) Esiste una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $A$ ? Motivare la risposta.

(d)  $A$  e  $B$  sono simili? Motivare la risposta.

---