Geometria e Algebra Appello del 22 gennaio 2018

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [openquestdefmixA] Dare la **definizione** di matrice quadrata $n \times n$ diagonalizzabile.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [openquestdefmixB] Sia A una matrice $n \times n$. Dare la **definizione** di autovettore di A.

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdefmixE`] Dare la **definizione** di matrici simili. ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestdefmixF`] Dare la **definizione** di autovalore di una matrice quadrata $n \times n$. ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestbasisE`] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di una lista di generatori di $\mathbb{R}^3$ che sia formata da 6 vettori distinti. ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openquestbasisF`] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di una lista di 4 vettori distinti che non è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [`openquestbasisG`] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di un vettore $X \in \mathbb{R}^4$ tale che la lista $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X \right\}$ sia linearmente dipendente.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [`openquestbasisH`] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di una lista di 3 vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ in $\mathbb{R}^4$ tali che $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ siano indipendenti, ma $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ siano dipendenti.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [invertibiliA] ♣ Sia $A = (A^1|A^2|X)$ con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se $\det A = 0$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

■ $X \in \mathrm{Span}(A^1, A^2)$.

□ A è una matrice invertibile.

□ Non si può determinare $\det(A^1|A^2|7X)$.

■ $x_1 = 0$.

Domanda [invertibiliB] ♣ Sia $A = (A^1|A^2|X)$ con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $\det A \neq 0$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

■ Esiste una matrice B tale che $AB = I_3$.

■ $x_3 \neq 0$.

■ I vettori $\{A^1, A^2, X\}$ sono linearmente indipendenti.

□ $X \in \mathrm{Span}(A^1, A^2)$.

Domanda [invertibiliC] ♣ Sia A una matrice 3×3 e siano A^1, A^2, A^3 le colonne di A. Se $\det A = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

■ $\{A^1, A^2, A^3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

■ La matrice $(2A^1|A^2|A^3)$ è invertibile.

□ I vettori $\{2A^1, 3A^2, 2A^3\}$ sono linearmente dipendenti.

□ $\det(3A^1|A^2| - 2A^3) = 0$.

Domanda [invertibiliD] ♣ Sia A una matrice 3×3 e siano A^1, A^2, A^3 le colonne di A. Se $\det A = 0$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

□ I vettori $\{A^1, A^2, A^3\}$ sono linearmente indipendenti.

■ I vettori $\{A^1 + A^2, A^2, A^3\}$ sono linearmente dipendenti.

□ È impossibile calcolare $\det(A^1 + A^2|A^2|A^3)$.

■ $\det(A^1| - A^2|2A^3) = 0$.

Domanda [quadfalgmultA] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y)$ corrisponde a una forma quadratica in $\mathbb{R}^2$ *definita* positiva:

■ $q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy$

□ $q(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$

□ $q(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$

□ $q(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 10xy$

Domanda [quadfalgmultB] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y)$ corrisponde a una forma quadratica in $\mathbb{R}^2$ *semidefinita* positiva:

■ $q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy$

□ $q(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$

□ $q(x, y) = x^2 + 4y^2$

□ $q(x, y) = 4x^2 + 2xy$

Domanda [quadfalgmultC] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y)$ corrisponde a una forma quadratica in $\mathbb{R}^2$ *definita* negativa:

□ $q(x, y) = -x^2 - y^2 - 4xy$

■ $q(x, y) = -3x^2 - 3y^2 + 4xy$.

□ $q(x, y) = -x^2 - 2xy - y^2$

□ $q(x, y) = -2y^2 - 2xy$

Domanda [quadfalgmultD] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y)$ corrisponde a una forma quadratica in $\mathbb{R}^2$ *semidefinita* negativa:

□ $q(x, y) = -x^2 - y^2 - xy$

■ $q(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2\sqrt{2}xy$

■ $q(x, y) = -x^2 - y^2 + 2xy$

□ $q(x, y) = -2x^2 - 4xy$

Domanda [quadfalgmultE] ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x,y)$ corrisponde a una forma quadratica in $\mathbb{R}^2$ *indefinita*:

- [x] $q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 8xy$
- [x] $q(x,y) = -x^2 - 2y^2 - 4xy$
- [ ] $q(x,y) = -x^2 - y^2 + xy$
- [x] $q(x,y) = -2x^2 - 2xy$

Domanda [coordBasisA] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, e $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?

- [x] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$
- [ ] $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$
- [ ] non è possibile determinare $\boldsymbol{u}$.
- [ ] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Domanda [coordBasisB] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, e $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$?

- [x] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$
- [ ] $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$
- [ ] non è possibile determinare $\boldsymbol{u}$.
- [ ] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [coordBasisC] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, e $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

- [x] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- [ ] $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$
- [ ] non è possibile determinare $\boldsymbol{u}$.
- [ ] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [coordBasisD] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \right\}$, e $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$?

- [x] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -17 \\ -4 \end{pmatrix}$
- [ ] $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$
- [ ] non è possibile determinare $\boldsymbol{u}$.
- [ ] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Domanda [pianobA] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y + z = 0$?

- [x] $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Domanda [pianobB] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x + y + z = 0$?

- [x] $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Domanda [pianobC] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y - z = 0$?

■ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

Domanda [pianobD] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y + z = 0$?

■ $\begin{cases} x - z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Domanda [baseortogA] ♣ Quali fra le seguenti sono una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$?

■ $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

□ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

□ $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\}$

□ $\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Domanda [baseortogB] ♣ Quali fra le seguenti sono una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$?

□ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

□ $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\}$

■ $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

■ $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Domanda [baseortogC] ♣ Quali fra le seguenti sono una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$?

■ $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

□ $\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

■ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

□ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Domanda [baseortogD] ♣ Quali fra le seguenti sono una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$?

□ $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\}$

■ $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\}$

□ $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

■ $\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Domanda [thspettrA] ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3. Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A, e che per l'autospazio $V_4 = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

■ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A + 3I)$.

□ Le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

□ $A\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

■ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{-3}$.

Domanda [`thspettrB`] ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3. Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A, e che per l'autospazio $V_4 = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- ■ $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$.
- □ $V_{-3} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$.
- ■ $\operatorname{tr} A = -2$.
- □ A non è invertibile.

Domanda [`thspettrC`] ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3. Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A, e che per l'autospazio $V_4 = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- ■ $V_{-3} = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
- □ $A\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\0\\8\end{pmatrix}$.
- ■ Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.
- □ $\det A = -12$.

Domanda [`thspettrD`] ♣ Sia A una matrice quadrata simmetrica 3×3. Sapendo che -3 e 4 sono gli *unici* autovalori reali di A, e che per l'autospazio $V_4 = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

- ■ $V_{-3} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.
- □ Le colonne di A formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
- ■ $A\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}$.
- □ $\operatorname{tr} A = 1$.