CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 gennaio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-k & -2 & -1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1 \\ -1 & -2 & k-1 & k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Supponiamo che
$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Determinare la matrice A tale che $L = L_A$.

   (c) Dire se L è iniettiva, altrimenti determinare le equazioni cartesiane e una base di $\operatorname{Ker} L$

   (d) Dire se L è suriettiva, altrimenti determinare una base di $\operatorname{Im} L$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A, specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Costruire una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, in modo che **NON** esista N invertibile tale che $B = N^{-1}AN$, giustificando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 gennaio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k-3 & k-4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ k+4 & 8 & 4-k & k+4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8pt)** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare. Supponiamo che

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Determinare la matrice A tale che $L = L_A$.

   (c) Dire se L è iniettiva, altrimenti determinare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} L$.

   (d) Determinare una base di $\operatorname{Im} L$ e delle equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A, specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Costruire una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, in modo che **NON** esista N invertibile tale che $B = N^{-1}AN$, giustificando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 gennaio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k & 1 \\ -2 & 1 & 1+k & -1 \\ -k-1 & -1 & -2 & -k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8 pt)** Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Supponiamo che

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Determinare la matrice A tale che $L = L_A$.

   (c) Dire se L è iniettiva, altrimenti determinare le equazioni cartesiane di $\mathrm{Ker}\, L$.

   (d) Dire se L è suriettiva, altrimenti determinare una base di $\mathrm{Im}\, L$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A, specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Costruire una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, in modo che **NON** esista N invertibile tale che $B = N^{-1}AN$, giustificando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**22 gennaio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k-4 & 1 \\ 4-k & 4-k & k+4 & -k+4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

2. **(8pt)** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare. Supponiamo che

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Determinare la matrice A tale che $L = L_A$.

   (c) Dire se L è iniettiva, altrimenti determinare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} L$.

   (d) Determinare una base di $\operatorname{Im} L$ e delle equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A, specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Costruire una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A, in modo che **NON** esista N invertibile tale che $B = N^{-1}AN$, giustificando la risposta.