

Geometria e Algebra Appello del 16 febbraio 2018

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

.....

.....

Domanda [openquestdefinvarC] Dare la **definizione** di rango di una matrice A di ordine $k \times n$ e dare un esempio di una matrice 3×3 di rango 2.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestdefinvarD] Dare la **definizione** di matrice invertibile e fornire un esempio di una matrice 3×3 non invertibile.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestdefinvarG] Sia λ un autovalore di una matrice quadrata $n \times n$ A . Dare la **definizione** di autospazio relativo a λ e di molteplicità geometrica di λ . w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestdefinvarH] Dare la **definizione** di matrice quadrata $n \times n$ diagonalizzabile. w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestbasiA] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V . Fornire un esempio di una lista di generatori di \mathbb{R}^4 che non è formata da 4 vettori. w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestbasiB] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V . Fornire un esempio di una lista di vettori linearmente indipendenti in \mathbb{R}^4 che non è formata da 4 vettori.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestbasiC] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V . Fornire un esempio di una lista formata da 4 vettori di \mathbb{R}^4 che non è una lista di generatori di \mathbb{R}^4 .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openquestbasiD] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V . Fornire un esempio di una lista di 4 vettori di \mathbb{R}^4 che non sono linearmente indipendenti.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [MsimilarA] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quali fra le seguenti matrici sono simili ad A ?

- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Domanda [MsimilarB] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quali fra le seguenti matrici sono simili ad A ?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Domanda [MsimilarC] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quali fra le seguenti matrici sono simili ad A ?

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Domanda [MsimilarD] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Quali fra le seguenti matrici sono simili ad A ?

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Domanda [subcoordA] Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$ e sia $\mathcal{B} =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ una base di V . Sia $\mathbf{u} \in V$ tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quale fra le seguenti affermazioni è corretta?

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$

non è possibile determinare \mathbf{u} .

Domanda [subcoordB] Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0 \right\}$ e sia $\mathcal{B} =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base di V . Sia $\mathbf{u} \in V$ tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quale fra le seguenti affermazioni è corretta?

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$

non è possibile determinare \mathbf{u} .

Domanda [subcoordC] Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0 \right\}$ e sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

una base di V . Sia $\mathbf{u} \in V$ tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quale fra le seguenti affermazioni è corretta?

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

non è possibile determinare \mathbf{u} .

Domanda [subcoordB] Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 2z - t = 0 \right\}$ e sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

una base di V . Sia $\mathbf{u} \in V$ tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quale fra le seguenti affermazioni è corretta?

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

non è possibile determinare \mathbf{u} .

Domanda [matrixmixA] ♣ Siano A e B due matrici quadrate di ordine n . Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

Se A e B sono invertibili, allora AB è invertibile.

Se A e B sono simmetriche, allora $3A + B$ è simmetrica.

Se A e B sono matrici ortogonali, allora AB è ortogonale.

Se A è simmetrica, non esiste $N \in M_{\mathbb{R}}(n)$ tale che $N^T A N$ è diagonale.

Domanda [matrixmixB] ♣ Siano A e B due matrici quadrate di ordine n . Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

Se A è simmetrica, allora $3A$ è simmetrica.

Se AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

Se A e B sono invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

Se B è ortogonale, allora $\det B \neq 2$.

Domanda [matrixmixC] ♣ Siano A e B due matrici quadrate di ordine n . Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

Se $A^T A = I_n$, allora le colonne di A sono a due a due ortogonali.

Se A e B sono invertibili allora AB è invertibile.

Se A è ortogonale, allora $2A$ è ortogonale.

Se A è simmetrica, allora $N^T A N$ è simmetrica per qualunque matrice $N \in M_{\mathbb{R}}(n)$.

Domanda [matrixmixD] ♣ Siano A e B due matrici quadrate di ordine n . Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

Se A e B sono simmetriche, allora $A - B$ è simmetrica.

Se AB non è invertibile, allora necessariamente A non è invertibile.

Se A è ortogonale, allora $-A$ è ortogonale.

Se le colonne di A sono una base ortogonale di \mathbb{R}^n , allora $A^T A = I_n$.

Domanda [linapplicA] ♣ Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare; sia $\text{Im } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = x - y = 0 \right\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

$\text{Im } L = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

$\dim \text{Im } L = 2$.

L non è iniettiva.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Im } L$.

Domanda [linapplicB] ♣ Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare e tale che $\text{Im } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = x - y - 2z = 0 \right\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

$\dim \text{Ker } L = 1.$

$\text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \subset \text{Im } L.$

$\text{Im } L = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

L non è né iniettiva, né suriettiva.

Domanda [linapplicC] ♣ Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare e tale che $\text{Ker } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = x - y = 0 \right\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

$\text{Ker } L = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \in \text{Ker } L.$

L non è suriettiva.

$\text{Ker } L = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Domanda [linapplicD] ♣ Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare e tale che $\text{Ker } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } L.$

$\dim \text{Ker } L = 1.$

L non è suriettiva.

$\text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \subset \text{Ker } L.$

Domanda [grasseccaA] Siano U e V sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^6 ; sia $\dim U = 5$ e $\dim V = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** corretta?

$\dim(U \cap V) = 3.$

$5 \leq \dim(U + V) \leq 6$

$\dim(U \cap V) \geq 5.$

V è sottoinsieme di U

Domanda [grasseccaB] Siano U e V sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^5 ; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** corretta?

$\dim(U + V) = 3.$

$\dim(U \cap V) \geq 3.$

$\dim(U \cap V) = 2.$

$3 \leq \dim(U + V) \leq 5$

Domanda [grasseccaC] Siano U e V sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^5 ; sia $\dim U = 3$ e $\dim V = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** corretta?

$\dim(U + V) = 3.$

$\dim(U \cap V) \geq 1.$

$\dim(U \cap V) = 3.$

$U + V = \mathbb{R}^5$

Domanda [grasseccaD] Siano U e V sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^8 ; sia $\dim U = 4$ e $\dim V = 4$. Quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** corretta?

$\dim(U + V) = 4.$

$U + V = \mathbb{R}^8.$

$\dim(U \cap V) = 0.$

$0 \leq \dim(U \cap V) \leq 4.$

Domanda [eigvalA] ♣ Siano A una matrice quadrata reale di ordine 3 e $p_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere.

- $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
- $\dim \text{Ker } A = 1$.
- $p_A(t)$ è totalmente decomponibile in \mathbb{R} , cioè *tutte* le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalB] ♣ Siano A una matrice quadrata reale di ordine 3 e $p_A(t) = -t^3 + t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere.

- $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità geometrica $m = 2$.
- $t = 0$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 3$.
- $p_A(t)$ non è totalmente decomponibile in \mathbb{R} , cioè *non* tutte le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalC] ♣ Siano A una matrice quadrata reale di ordine 3 e $p_A(t) = -t^3 + t^2$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere.

- $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
- $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $\dim \text{Ker } A = 2$.
- $p_A(t)$ è totalmente decomponibile in \mathbb{R} , cioè *tutte* le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalD] ♣ Siano A una matrice quadrata reale di ordine 3 e $p_A(t) = -t^3 - t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere.

- $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
- $t = 0$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
- $p_A(t)$ non è totalmente decomponibile in \mathbb{R} , cioè *non* tutte le sue radici sono reali.