**SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!**

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **16 febbraio 2018** |
| **Cognome:** | **Matricola:** |
| **Nome:** | **Corso di Laurea:** |

1. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

   (c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

   (d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$:

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k+2 & k+1 & k-2 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k-2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 0$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$ e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di $q$ (cioè se $q$ è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice $N$ per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

**SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!**

| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **16 febbraio 2018** |
|---|---|
| **Cognome:** | **Matricola:** |
| **Nome:** | **Corso di Laurea:** |

1. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

   (c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

   (d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$:

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k & 0 & k \\ 0 & 2-2k & 1-k & 1-k \\ -2k & k & k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 0$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$ e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di $q$ (cioè se $q$ è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice $N$ per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

**SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!**

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **16 febbraio 2018** |
| **Cognome:** | **Matricola:** |
| **Nome:** | **Corso di Laurea:** |

1. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

   (c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

   (d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$:

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1-k & -1 & 1 \\ 2-k & 3 & k+2 & -k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -k \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 0$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$ e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di $q$ (cioè se $q$ è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice $N$ per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

**SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!**

| | |
|---|---|
| **CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA** | **16 febbraio 2018** |
| **Cognome:** | **Matricola:** |
| **Nome:** | **Corso di Laurea:** |

1. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

   (c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

   (d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$:

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k & 3k-5 & 0 & k \\ 0 & 10-2k & 5-k & 5-k \\ 2k & k & 0 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

   (b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

   (d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 2$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 19 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di $A$ e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di $q$ (cioè se $q$ è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice $N$ per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.