Geometria e Algebra Appello del 25 giugno 2018

☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda `[openprojA]` Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Definire $W^\perp$ e dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda `[openprojB]` Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale e sia $v \in \mathbb{R}^n$. Definire la proiezione ortogonale di v su W.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [openprojC] Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale di dimensione k. Dare la definizione di base ortogonale di V.

☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [openprojD] Dare la definizione di matrice ortogonale $n \times n$.

☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [charpolyA] Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ due matrici quadrate 3×3. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = -t^3 - t^2 + 6t$, e che gli autovalori di B sono $\{0, 2, -3\}$, è possibile stabilire se le matrici A e B sono simili oppure no? Giustificare la risposta.

☐**w** ☐**p** ■**c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`charpolyB`] Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ due matrici quadrate 3×3. Sapendo che gli autovalori di A sono $\{0, 1, 4\}$, e che il polinomio caratteristico di B è $p_B(t) = -t^3 + 5t^2 - 4t$, è possibile stabilire se le matrici A e B sono simili oppure no? Giustificare la risposta. ☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [`charpolyC`] Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ due matrici quadrate 3×3. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = -t^3 + 4t$, e che gli autovalori di B sono $\{0, 2, -2\}$, è possibile stabilire se le matrici A e B sono simili oppure no? Giustificare la risposta. ☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [`charpolyD`] Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ due matrici quadrate 3×3. Sapendo che gli autovalori di A sono $\{0, 1, 3\}$, e che il polinomio caratteristico di B è $p_B(t) = -t^3 + 4t^2 - 3t$, è possibile stabilire se le matrici A e B sono simili oppure no? Giustificare la risposta. ☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [spanRCA] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- ☐ Se $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 2$.
- ■ Se $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\boldsymbol{u}_3 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$.
- ☐ Se $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 2$, allora $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 3$.
- ■ Se $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 2$, allora $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ sono linearmente indipendenti.

Domanda [spanRCB] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- ■ Se $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sono linearmente dipendenti.
- ☐ Se $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$.
- ☐ Se $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$, allora $\boldsymbol{u}_3 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$.
- ■ Se $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$, allora $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ sono linearmente dipendenti.

Domanda [spanRCC] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- ☐ Se $\boldsymbol{u}_3 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, allora $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$.
- ■ Se $\boldsymbol{u}_3 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, allora $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ sono linearmente dipendenti.
- ■ Se $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 1$, allora almeno uno dei tre vettori è diverso dal vettore nullo.
- ■ Se $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 1$, allora $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \leq 1$.

Domanda [spanRCD] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- ☐ Se $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \neq \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sono linearmente indipendenti.
- ■ Se $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \neq \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, allora $\boldsymbol{u}_3 \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$.
- ☐ Se $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$, allora $\boldsymbol{u}_3 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$.
- ■ Se $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 2$, allora uno dei tre vettori è combinazione lineare degli altri due.

Domanda [invdiagA] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è

- ■ invertibile, ma non diagonalizzabile.
- ☐ non invertibile, ma diagonalizzabile.
- ☐ non invertibile e non diagonalizzabile.
- ☐ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [invdiagB] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è

- ☐ invertibile, ma non diagonalizzabile.
- ■ non invertibile, ma diagonalizzabile.
- ☐ non invertibile e non diagonalizzabile.
- ☐ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [invdiagC] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è

- ☐ invertibile, ma non diagonalizzabile.
- ☐ non invertibile, ma diagonalizzabile.
- ☐ non invertibile e non diagonalizzabile.
- ■ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`invdiagD`] La matrice $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ è

□ invertibile, ma non diagonalizzabile. ■ non invertibile e non diagonalizzabile.
□ non invertibile, ma diagonalizzabile. □ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`generatorA`] ♣ Sia $S = \{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. Quali delle seguenti liste unite a S costituisce un sistema di **generatori** di $\mathbb{R}^3$?

■ $\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ ■ $\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\}$

Domanda [`generatorB`] ♣ Sia $S = \{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. Quali delle seguenti liste unite a S costituisce un sistema di **generatori** di $\mathbb{R}^3$?

■ $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$ ■ $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\}$

Domanda [`generatorC`] ♣ Sia $S = \{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. Quali delle seguenti liste unite a S costituisce una **base** di $\mathbb{R}^3$?

■ $\{\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\}$ ■ $\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\}$

Domanda [`generatorD`] ♣ Sia $S = \{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. Quali delle seguenti liste unite a S costituisce una **base** di $\mathbb{R}^3$?

■ $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\}$ □ $\{\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\}$

Domanda [`linsurjA`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione *lineare*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere sapendo che $L\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

□ L è iniettiva. ■ L è suriettiva.
■ Non ci sono abbastanza informazioni per determinare $\operatorname{Ker} L$. □ $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$.

Domanda [`linsurjB`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione *lineare*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere sapendo che $L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

■ L è sicuramente non iniettiva. □ L non può essere suriettiva.
■ Non ci sono abbastanza informazioni per determinare $\operatorname{Im} L$. ■ $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$.

Domanda [`linsurjC`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione *lineare*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere sapendo che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

■ L è sicuramente non suriettiva.

□ $\operatorname{Ker} L$ è banale ($\dim \operatorname{Ker} L = 0$).

□ Non ci sono abbastanza informazioni per determinare $\operatorname{Im} L$.

■ $\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$.

Domanda [`linsurjD`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione *lineare*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere sapendo che $L\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

□ L è suriettiva.

■ $\operatorname{Ker} L$ è banale ($\dim \operatorname{Ker} L = 0$).

□ Non ci sono abbastanza informazioni per determinare $\operatorname{Im} L$.

□ $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$.

Domanda [`orthbasisA`] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

□ $\begin{pmatrix}9\\-1\\0\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}3/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$

Domanda [`orthbasisB`] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

□ $\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}5/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}5/3\\1/3\\0\end{pmatrix}$

Domanda [`orthbasisC`] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$ una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

□ $\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}4/\sqrt{2}\\0\\3/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

Domanda [`orthbasisD`] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

□ $\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}3/\sqrt{6}\\0\\5/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}1/2\\0\\5/2\end{pmatrix}$

Domanda [`rettapA`] Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Quale dei seguenti piani è ortogonale alla retta $r\colon x + y + z = x - 2z + 1 = 0$?

■ $2x - 3y + z = 0$ □ $x + y - 2z = 0$ □ $2x + z = 0$ □ $2x + y + z = 1$

Domanda [`rettapB`] Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Quale dei seguenti piani è ortogonale alla retta $r\colon x + y - z = 2x + z - 1 = 0$?

■ $x - 3y - 2z = 1$ □ $x - y - 3z = 0$ □ $x - 2z = 0$ □ $x + y - 2z = 0$

Domanda [`rettapC`] Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Quale dei seguenti piani è ortogonale alla retta $r\colon x + y - z - 2 = y + 2z = 0$?

■ $3x - 2y + z = 0$ □ $x + y + 2z = 0$ □ $2y - z = 1$ □ $x + 2y - z = 0$

Domanda [`rettapD`] Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Quale dei seguenti piani è ortogonale alla retta $r\colon x + y + z + 2 = 2x - y = 0$?

■ $x + 2y - 3z = 0$ □ $x - 2y + z = 1$ □ $x + 2y = 0$ □ $x + 2y - z = 0$