SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**25 giugno 2018**
Cognome:	**Matricola:**
Nome:	**Corso di Laurea:**

1. **(8 pt)** Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice $A = [[L]]_{\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_3}$ rappresentativa della L **nelle basi canoniche** di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\0 & -1 & -1 & 1\\1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

(b) Trovare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$ e una sua base

$$\operatorname{Im} A\colon x - y - 2z = 0$$

(c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$ $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\}.$

(d) Trovare una lista di vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots\}$ tali che $\{L(\boldsymbol{u}_1), L(\boldsymbol{u}_2), \dots\}$ sia una base di $\operatorname{Im} L$. $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}\}.$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix}k & k-2 & k\\2k-1 & 2k-3 & k\\k-1 & 2k-3 & 0\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}k\\k+1\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 2$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	1
1	2	3	no	
2	2	2	sì	1
resto	3	3	sì	0

Risolubile per $k \neq 1$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k = 0, 2$.

Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ semplici; $\lambda_3 = 4$, $\mu_3 = m_3 = 2$. Semidefinita positiva.

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 febbraio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\7\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\8\\2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice $A = [[L]]_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}$ rappresentativa della L **nelle basi canoniche** di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 1\\3 & -1 & 2\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(b) Trovare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$ e una sua base

$$\operatorname{Im} A\colon x + y - z = x - y - t = 0$$

(c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$ $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \{\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\}$.

(d) Trovare una lista di vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots\}$ tali che $\{L(\boldsymbol{u}_1), L(\boldsymbol{u}_2), \dots\}$ sia una base di $\operatorname{Im} L$. $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\}$.

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix}k & k & 2k+1\\2k & 2k & 3k+1\\k & 2k & 2k+1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}k+1\\2k+1\\k+1\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Determinare tutte le soluzioni per $k = 1$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-1	2	3	no	
0	1	1	sì	2
resto	3	3	sì	0

Risolubile per $k \neq -1$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

(a) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6$. $m_1 = 2$.

(b) Definita positiva.

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) X_0 non esiste A perché è definita positiva.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 febbraio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare la matrice $A = [[L]]_{\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_3}$ rappresentativa della L **nelle basi canoniche** di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\\1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

   (b) Trovare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$ e una sua base

$$\operatorname{Im} A\colon x - 3y + z = 0$$

   (c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$ $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\-1\end{pmatrix}\}$.

   (d) Trovare una lista di vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots\}$ tali che $\{L(\boldsymbol{u}_1), L(\boldsymbol{u}_2), \dots\}$ sia una base di $\operatorname{Im} L$. $\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}\}$.

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix}k-2 & k & k-2\\2k & 2k+2 & k-2\\k+2 & 2k+2 & 0\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 0$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
2	2	3	no	
0	2	2	sì	1
-2	2	3	no	
resto	3	3	sì	0

Risolubile per $k \neq \pm 2$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ entrambi con molteplicità 2. Definita positiva

$$N = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Non esiste X_0.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 febbraio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Sapendo che

$$L\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\7\\-1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\5\\-3\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice $A = [[L]]_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}$ rappresentativa della L **nelle basi canoniche** di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. $A = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-1\\4&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$

(b) Trovare le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$ e una sua base

$$\operatorname{Im} A\colon x + 2y - z = x - 2y - t = 0$$

(c) Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$ $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \{\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\}$.

(d) Trovare una lista di vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots\}$ tali che $\{L(\boldsymbol{u}_1), L(\boldsymbol{u}_2), \dots\}$ sia una base di $\operatorname{Im} L$. $\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\}$.

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix}k & 0 & k\\ k+2 & k+2 & k+2\\ 0 & k+2 & k+2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1\\k+2\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0:

(d) Determinare tutte le soluzioni per $k = -1$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	
-2	1	1	sì	2
resto	3	3	sì	0

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = -2$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

$\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ semplici, $\lambda_1 = -3$ con molteplicità 2. Indefinita.

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$