SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 luglio 2018**
Cognome:	**Matricola:**
Nome:	**Corso di Laurea:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 9 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

   Autovalori: 0 semplice 1 doppio

   $V_0 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix})$ $V_1 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$, (o anche $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$)

---

2. **(8pt)**
   Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2, \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_3 e ortogonale a r:

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

   (d) Determinare la distanza di P_1 da π.

$$r : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\pi : x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 4/9 \\ 5/9 \end{pmatrix} \qquad d(P_1, \pi) = \frac{16}{\sqrt{9}}.$$

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2+k & -4 & k-2 & -2 \\ k & 2k & 3k & 0 \\ 1 & -2 & -1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 1$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	1	1	sì	3
-3	2	3	no	$\sharp$
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq -3$,

$\dim \mathrm{Sol} = 3$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/4 \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 luglio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

   Autovalori: 0 doppio 1 semplice

   $V_0 = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}),\ V_1 = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix})$

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2, \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_3 e ortogonale a r:

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

   (d) Determinare l'angolo fra $\overrightarrow{QP_1}$ e $\overrightarrow{QP_3}$.

$$r : \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ 2y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\pi : 4x - 3y - 2z + 37 = 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{angolo} = \pi/2.$$

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k-5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & k-4 \\ k-3 & 3k-9 & 2k-6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = 2$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
3	1	2	no	$\sharp$
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq 3$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 0, 3$.

Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 luglio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

   Autovalori: 0 semplice -1 doppio

   $V_0 = \text{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ $V_{-1} = \text{Span}(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$ (o anche $\text{Span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$).

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2, \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_3 e ortogonale a r:

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

   (d) Determinare la distanza di P_2 da π.

$$r : \begin{cases} y + 2z - 2 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\pi : 2x - 2y + z - 1 = 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix} \qquad d(P_2, \pi) = \frac{7}{\sqrt{9}}.$$

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 3k & 0 \\ -4 & 4+3k & 3k-4 & -4 \\ -2 & 2 & -2 & 3k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = -1$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	1	2	no	$\sharp$
-2	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = -2$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 10/9 \\ 0 \\ 8/9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE NOME E COGNOME!

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 luglio 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -8 & -8 & 20 \\ -3 & -4 & 8 \\ -4 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

   Autovalori: -2 semplice 0 doppio

   $V_{-2} = \text{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ $V_{-0} = \text{Span}(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_3 e ortogonale a r:

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

   (d) Determinare l'angolo fra $\overrightarrow{QP_1}$ e $\overrightarrow{QP_3}$.

$$r : \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 2z - 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\pi : 4x - 2y - 3z + 37 = 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{angolo} = \pi/2.$$

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 3k-8 \\ 3k-10 & -4 & 3k-2 & -4 \\ 3k-6 & k-2 & k-2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+k \\ 2-k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Determinare una rappresentazione parametrica della varietà delle soluzioni per $k = -2$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	$\sharp$
2	1	1	sì	3
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 3$ per $k = 2$.

Soluzione per $k = -2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ -10/3 \\ 0 \\ 2/9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$