Geometria e Algebra Appello del 6 settembre 2018

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [openinjsurA] Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^k$ un'applicazione lineare; determinare per quali valori di k l'applicazione *può* essere iniettiva, giustificando la risposta. Fornire, quindi, un esempio esplicito di applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che **non sia** iniettiva (ossia, $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dots$).

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [openinjsurB] Sia $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare; determinare per quali valori di n l'applicazione *non può* essere iniettiva, giustificando la risposta. Fornire, quindi, un esempio esplicito di applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che **sia** iniettiva (ossia, $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dots$).

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openinjsurC`] Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^k$ un'applicazione lineare; determinare per quali valori di k l'applicazione *può* essere suriettiva, giustificando la risposta. Fornire, quindi, un esempio esplicito di applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che **non sia** suriettiva (ossia, $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \dots$).

☐w ☐p ☐a ■c

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`openinjsurD`] Sia $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare; determinare per quali valori di n l'applicazione *non può* essere suriettiva, giustificando la risposta. Fornire, quindi, un esempio esplicito di applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che **sia** suriettiva (ossia, $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \dots$).

☐w ☐p ☐a ■c

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`opengenA`] Data una lista di vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ in uno spazio vettoriale V, definire $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$. Lo studente spieghi se gli insiemi $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$ e $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ coincidano o meno.

☐w ☐p ☐a ■c

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [opengenB] Si definisca la nozione di lista di generatori di uno spazio vettoriale. Si costruisca una lista di generatori di $\mathbb{R}^3$ che *non* sono linearmente indipendenti.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [opengenC] Si definisca la nozione di lista di vettori linearmente indipendenti. Si costruisca una lista di vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$ che *non* sono generatori dello spazio $\mathbb{R}^3$.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [opengenD] Si definisca la nozione di base di uno spazio vettoriale. Se $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ è una base di V e $\boldsymbol{u}$ è un arbitrario vettore di V, è vero che $\boldsymbol{u}$ si può ottenere come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$? Lo studente motivi la risposta.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [subspaceA] ♣ Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$; quali delle seguenti equazioni individuano un **sottospazio** di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1?

- ■ $x + y = y + z = 2x - t = 0$.
- ☐ $x + 2y - z + t = 0$.
- ■ $x = y = z = t$.
- ☐ $x + y = z - t = 0$.

Domanda [subspaceB] ♣ Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$; quali delle seguenti equazioni individuano un **sottospazio** di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3?

- ☐ $x - y = y - z = x + 2t = 0.$
- ■ $x - 2y + z - t = 0.$
- ☐ $x = y = z = t.$
- ☐ $x - y = z + t = 0.$

Domanda [subspaceC] ♣ Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$; quali delle seguenti equazioni individuano un **sottospazio** di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 2?

- ■ $x - y = y - 2z = 2t - w = 0.$
- ☐ $x + y - z = t - w = 0.$
- ☐ $x = y = t.$
- ☐ $x + y = y - z = 0.$

Domanda [subspaceD] ♣ Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$; quali delle seguenti equazioni individuano un **sottospazio** di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 3?

- ☐ $x + y = y + 2z = 2t + w = 0.$
- ■ $x + y = t - w = 0.$
- ■ $x = y = w.$
- ☐ $x + y + z = t + w.$

Domanda [autovalA] ♣ Dato il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire per quali fra le seguenti matrici $\boldsymbol{u}$ è autovettore:

- ■ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- ■ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Domanda [autovalB] ♣ Dato il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire per quali fra le seguenti matrici $\boldsymbol{u}$ è autovettore:

- ■ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ■ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- ■ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Domanda [autovalC] ♣ Dato il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, stabilire per quali fra le seguenti matrici $\boldsymbol{u}$ è autovettore:

- ■ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- ■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Domanda [autovalD] ♣ Dato il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire per quali fra le seguenti matrici $\boldsymbol{u}$ è autovettore:

- ■ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$
- ■ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Domanda [sistemaA] ♣ Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite e indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni; quali delle seguenti affermazioni sono *necessariamente* vere?

- ■ Se $\mathcal{S} \neq \varnothing$ allora $\dim \mathcal{S} = n - \operatorname{rg} A$.
- □ Il numero degli elementi di $\mathcal{S}$ potrebbe essere 2.
- ■ Se X e Y sono soluzioni del sistema allora $X - Y \in \operatorname{Ker} A$.
- □ Se $k > n$ non c'è mai soluzione.

Domanda [sistemaB] ♣ Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite e indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni; quali delle seguenti affermazioni sono *necessariamente* vere?

- □ $\dim \mathcal{S} = n - \operatorname{rg} A$.
- □ $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^k$.
- □ Se X è soluzione allora $2X$ è ancora soluzione.
- ■ Se $k < n$, o non esistono soluzioni, o la soluzione non è unica.

Domanda [sistemaC] ♣ Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite e indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni; quali delle seguenti affermazioni sono *necessariamente* vere?

- □ $\dim \mathcal{S} = n - k$.
- □ $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
- ■ Se X è soluzione del sistema e $Y \in \ker A$ allora $X + Y$ è ancora soluzione.
- □ Se $k > n$ non c'è mai soluzione.

Domanda [sistemaD] ♣ Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite e indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni; quali delle seguenti affermazioni sono *necessariamente* vere?

- □ La soluzione del sistema esiste ed è unica se e solo se $n = \operatorname{rg} A$.
- ■ Se $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $B = \mathbf{0}_k$.
- □ Se X e Y sono soluzioni del sistema allora $X + Y$ è ancora soluzione del sistema.
- ■ Se la soluzione del sistema è unica allora $n \leq k$.

Domanda [invertibiliA] Si consideri la seguente matrice invertibile $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ e si determini quale fra le seguenti matrici è l'inversa di A:

■ $\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/8 \\ 1/4 & 1/11 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Domanda [invertibiliB] Si consideri la seguente matrice invertibile $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$ e si determini quale fra le seguenti matrici è l'inversa di A:

■ $\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 \\ 1/9 & 1/11 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} -11 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [invertibiliC] Si consideri la seguente matrice invertibile $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ e si determini quale fra le seguenti matrici è l'inversa di A:

□ $\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/7 \\ 1/4 & 1/9 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Domanda [`invertibiliD`] Si consideri la seguente matrice invertibile $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$ e si determini quale fra le seguenti matrici è l'inversa di A:

■ $\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 11 & -9 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1/9 & 1/5 \\ 1/11 & 1/6 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$.

Domanda [`spettraleA`] ♣ Stabilire per quali delle seguenti matrici 2×2 è possibile determinare due autovettori ortogonali tra di loro.

■ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda [`spettraleB`] ♣ Stabilire per quali delle seguenti matrici 2×2 è possibile determinare due autovettori ortogonali tra di loro.

■ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda [`spettraleC`] ♣ Stabilire per quali delle seguenti matrici 2×2 è possibile determinare due autovettori ortogonali tra di loro.

■ $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Domanda [`spettraleD`] ♣ Stabilire per quali delle seguenti matrici 2×2 è possibile determinare due autovettori ortogonali tra di loro.

■ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [`rangoA`] ♣ Sia A una matrice 3×4 e si supponga che *una* sottomatrice 3×3 di A abbia determinante nullo mentre *una* sottomatrice 2×2 abbia determinante diverso da 0. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente corrette.

- □ A non può avere rango massimo.
- □ $\operatorname{rg} A = 2$
- ■ $\operatorname{rg} A \geq 2$
- ■ Con le informazioni in possesso non è possibile stabilire con esattezza il rango di A.

Domanda [`rangoB`] ♣ Sia A una matrice 3×4 e si supponga che *tutte* le sottomatrici 3×3 di A abbiano determinante nullo mentre *una* sottomatrice 2×2 abbia determinante diverso da 0. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente corrette.

- ■ A non può avere rango massimo.
- ■ $\operatorname{rg} A = 2$
- □ A potrebbe avere rango 4.
- □ Con le informazioni in possesso non è possibile stabilire con esattezza il rango di A.

Domanda [`rangoC`] ♣ Sia A una matrice 3×4 e si supponga che *tutte* le sottomatrici 3×3 di A abbiano determinante nullo e *una* sottomatrice 2×2 abbia determinante uguale 0. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente corrette.

- ■ A non può avere rango massimo.
- □ $\operatorname{rg} A = 2$
- □ $\operatorname{rg} A = 1$.
- ■ Con le informazioni in possesso non è possibile stabilire con esattezza il rango di A.

Domanda [rangoD] ♣ Sia A una matrice 3×4 e si supponga che *tutte* le sottomatrici 3×3 e 2×2 di A abbiano determinante nullo. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- ■ A non può avere rango massimo.
- □ A è necessariamente la matrice nulla.
- ■ A potrebbe avere rango 1.
- ■ Con le informazioni in possesso non è possibile stabilire con esattezza il rango di A.