Geometria e Algebra Appello del 5 febbraio 2019

☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0
☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1
☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2
☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3
☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4
☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5
☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6
☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7
☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8
☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [openspettraleA] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice **simmetrica** 4×4 avente $1, -2$ e 5 come *unici* autovalori di A. Sia $V_{-2} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 2t - z = 0 \}$ e $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Determinare una base dell'autospazio V_5, motivando la risposta. ☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openspettraleB`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice **simmetrica** 4×4 avente $2, 3$ e -4 come *unici* autovalori di A. Sia $V_3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+z = y+3t = 0\}$ e $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base dell'autospazio V_{-4}, motivando la risposta.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`openspettraleC`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice **simmetrica** 4×4 avente $3, -4$ e 6 come *unici* autovalori di A. Sia $V_6 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ e $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare le equazioni dell'autospazio V_{-4}, motivando la risposta.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`openspettraleD`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice **simmetrica** 4×4 avente $-1, -2$ e 5 come *unici* autovalori di A. Sia $V_5 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ e $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}$. Determinare le equazioni dell'autospazio V_{-2}, motivando la risposta.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`questlinapplsA`] Dimostrare che il nucleo $\operatorname{Ker} L$ di un'applicazione lineare $L\colon V \to W$ è un sottospazio di V.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`questlinapplsB`] Dati U e W sottospazi vettoriali di V, dimostrare che $U \cap W$ è un sottospazio di V.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`questlinapplsC`] Siano V e W spazi vettoriali; dare la definizione generale di applicazione lineare $L\colon V \to W$.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [`questlinapplsD`] Sia V uno spazio vettoriale; dare la definizione generale di sottospazio vettoriale di V.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [`inversadnA`] Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ A non è invertibile.

Domanda [`inversadnB`] Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ A non è invertibile.

Domanda [`inversadnC`] Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ■ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ A non è invertibile.

Domanda [`inversadnD`] Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ■ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- ☐ A non è invertibile.

Domanda [`coordbasisdnA`] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta, sapendo che $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

- ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [`coordbasisdnB`] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta, sapendo che $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$
- ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [`coordbasisdnC`] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta, sapendo che $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ■ $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [`coordbasisdnD`] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta, sapendo che $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

- [x] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$
- [ ] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix}$
- [ ] $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [`ortonormA`] ♣ Sia $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^4$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [x] Esiste una base ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^4$ che contiene $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$.
- [x] I vettori $Y_1, \ldots, Y_k$ generano un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione k.
- [ ] $k \geq 4$.
- [x] $Y_1 \neq \mathbf{0}$.

Domanda [`ortonormB`] ♣ Sia $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^n$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [x] $n \geq 4$.
- [x] $Y_4 \neq \mathbf{0}$.
- [ ] I vettori Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sono linearmente dipendenti.
- [ ] Y_1 è ortogonale a $(Y_1 + Y_3)$.

Domanda [`ortonormC`] ♣ Sia $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^4$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [ ] $k = 5$.
- [x] I vettori $Y_1, \ldots, Y_k$ sono linearmente indipendenti.
- [x] $k \leq 4$.
- [x] $Y_1 \neq \mathbf{0}$.

Domanda [`ortonormD`] ♣ Sia $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^n$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [ ] $n \leq 3$.
- [x] $Y_3 \neq \mathbf{0}$.
- [ ] $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.
- [x] Y_1 è ortogonale a $(Y_2 + Y_3)$.

Domanda [`geometriadnA`] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è un **piano** nello spazio:

- [x] $\begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$
- [x] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$

Domanda [`geometriadnB`] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è **vuoto**:

- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases}$
- [x] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} y = 3 \end{cases}$

Domanda [`geometriadnC`] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è una **retta** nello spazio:

□ $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x + 6y + 3z = 2 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Domanda [`geometriadnD`] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è un **piano** nello spazio:

■ $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 3x - 3y - z = 3 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} z = -2 \end{cases}$

Domanda [`autoA`] ♣ Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ e si stabilisca quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 6.

□ Il vettore nullo è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 12.

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

Domanda [`autoB`] ♣ Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & -4 & -10 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e si stabilisca quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 8.

□ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 16.

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

Domanda [`autoC`] ♣ Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ e si stabilisca quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 4.

□ Il vettore nullo è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 12.

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

Domanda [`autoD`] ♣ Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ e si stabilisca quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore -4.

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore -8.

Domanda [`canfquadA`] ♣ Data la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quali delle espressioni seguenti sono una sua possibile forma canonica $q_c(x', y', z')$?

- ■ $(x')^2 + (y')^2 - 5(z')^2$.
- ■ $(x')^2 - 5(y')^2 + (z')^2$.
- □ $(x')^2 - 5(y')^2 - 5(z')^2$.
- □ $-2(x')^2 + 3(y')^2 + (z')^2$.

Domanda [`canfquadB`] ♣ Data la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, quali delle espressioni seguenti sono una sua possibile forma canonica $q_c(x', y', z')$?

- ■ $4(x')^2 - 2(y')^2 - 2(z')^2$.
- ■ $-2(x')^2 - 2(y')^2 + 4(z')^2$.
- □ $-2(x')^2 + 4(y')^2 + 4(z')^2$.
- □ $-2(x')^2 - 3(y')^2 + (z')^2$.

Domanda [`canfquadC`] ♣ Data la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, quali delle espressioni seguenti sono una sua possibile forma canonica $q_c(x', y', z')$?

- ■ $(x')^2 + 3(y')^2 + (z')^2$.
- ■ $3(x')^2 + (y')^2 + (z')^2$.
- □ $(x')^2 + 3(y')^2 + 3(z')^2$.
- □ $(x')^2 - (y')^2 + 2(z')^2$.

Domanda [`canfquadD`] ♣ Data la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, quali delle espressioni seguenti sono una sua possibile forma canonica $q_c(x', y', z')$?

- ■ $4(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2$.
- ■ $4(x')^2 + 4(y')^2 + 2(z')^2$.
- □ $2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2$.
- □ $3(x')^2 - (y')^2 + 4(z')^2$.