Geometria e Algebra — Appello del 26 febbraio 2019

☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0
☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1
☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2
☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3
☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4
☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5
☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6
☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7
☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8
☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`opendiagA`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (t^2+4)(1-t)$, trovare la traccia di A e spiegare se A è diagonalizzabile o non diagonalizzabile, motivando la risposta.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendiagB`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (4-t)(1+t)(2+t)$, trovare il determinante di A e spiegare se A è diagonalizzabile o non diagonalizzabile, motivando la risposta.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendiagC`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (t^2+2)(3-t)$, trovare la traccia di A e spiegare se A è diagonalizzabile o non diagonalizzabile, motivando la risposta.

□ **w** □ **p** □ **a** ■ **c**

Domanda [`opendiagD`] Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (t^2-4)(3+t)$, trovare il determinante di A e spiegare se A è diagonalizzabile o non diagonalizzabile, motivando la risposta.

□ **w** □ **p** □ **a** ■ **c**

Domanda [`quesbasitreA`] Esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che la lista $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$? In caso positivo esibire un tale $\boldsymbol{v}$, in caso negativo spiegare perché non esiste.

□ **w** □ **p** □ **a** ■ **c**

Domanda [`quesbasitreB`] Esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$ tale che la lista $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$? In caso positivo esibire un tale $\boldsymbol{v}$, in caso negativo spiegare perché non esiste.

□ **w** □ **p** □ **a** ■ **c**

Domanda [`quesbasitreC`] Esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che la lista $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} \right\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$? In caso positivo esibire un tale $\boldsymbol{v}$, in caso negativo spiegare perché non esiste.

□ **w** □ **p** □ **a** ■ **c**

Domanda [`quesbasitreD`] Esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che la lista $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$? In caso positivo esibire un tale $\boldsymbol{v}$, in caso negativo spiegare perché non esiste.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

Domanda [`determinantetrepertreA`] Sia A una matrice reale 3×3, tale che $\det A = 1$. Stabilire quale di queste affermazioni è vera:

- ☐ $\det(2A) = 2$
- ☐ Le colonne di A sono linearmente dipendenti
- ■ $\det(2A) = 8$
- ☐ $\det(A^{-1}) = -1$

Domanda [`determinantetrepertreB`] Sia A una matrice reale 3×3, tale che $\det A = -1$. Stabilire quale di queste affermazioni è vera:

- ☐ $\det(2A) = 8$
- ☐ Le colonne di A non formano una base di $\mathbb{R}^3$
- ☐ $\det(2A) = -2$
- ■ $\det(A^{-1}) = -1$

Domanda [`determinantetrepertreC`] Sia A una matrice reale 3×3, tale che $\det A = 2$. Stabilire quale di queste affermazioni è vera:

- ☐ $\det(2A) = 8$
- ☐ Le colonne di A non sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$
- ■ $\det(2A) = 16$
- ☐ $\det(A^{-1}) = -2$

Domanda [`determinantetrepertreD`] Sia A una matrice reale 3×3, tale che $\det A = 3$. Stabilire quale di queste affermazioni è vera:

- ☐ $\det(2A) = 6$
- ■ Le colonne di A sono linearmente indipendenti
- ☐ $\det(2A) = 16$
- ☐ $\det(A^{-1}) = -3$

Domanda [`grassdnA`] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^6$; sia $\dim U = 5$ e $\dim V = 3$. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

- ☐ $\dim(U \cap V) \geq 3$.
- ■ $5 \leq \dim(U + V) \leq 6$.
- ☐ $\dim(U \cap V) < 3$.
- ☐ V è sottoinsieme di U.

Domanda [grassdnB] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 4$. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

- □ $\dim(U \cap V) = 2$.
- ■ $\dim(U \cap V) \geq 1$.
- ■ $\dim(U + V) \geq 4$.
- □ U e V sono in somma diretta.

Domanda [grassdnC] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 4$; **sia** $\mathbb{R}^5 = U + V$. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

- □ $U \subset V$.
- □ $\dim(U \cap V) = 3$.
- ■ $\dim(U \cap V) = 1$.
- □ $\dim(U \cap V) = 0$.

Domanda [grassdnD] ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^6$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 5$; inoltre U **non è contenuto** in V. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

- □ $\dim(U \cap V) = 0$.
- □ $\dim(U \cap V) = 2$.
- ■ U e V non sono in somma diretta.
- ■ $\dim(U \cap V) < 2$.

Domanda [ortomixA] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

- ■ $\langle A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v} \rangle = 3$.
- □ $\det(A^2) = 1/4$.
- ■ Le colonne di A sono linearmente *indipendenti.*
- ■ $A^{\mathrm{T}} A = I_3$.

Domanda [ortomixB] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, e $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

- ■ $\langle A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u} \rangle = 17$.
- ■ $\det(A^2) = 1$.
- □ Le colonne di A sono linearmente *dipendenti.*
- ■ La matrice A è ortogonale.

Domanda [ortomixC] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, e $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

- □ $\langle A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v} \rangle = 3$.
- □ $\det(A^4) = 1/25$.
- ■ La matrice A è invertibile.
- □ $A^{\mathrm{T}} A = A$.

Domanda [ortomixD] ♣ Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, e $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

- ■ $A\boldsymbol{u}$ è ortogonale ad $A\boldsymbol{v}$.
- ■ $\det(A^{\mathrm{T}} A^2 A^{\mathrm{T}}) = 1$.
- □ La matrice A *non* è invertibile.
- □ La matrice A *non* è ortogonale.

Domanda [`cartesianA`] Si determini quale fra le seguenti è una rappresentazione **cartesiana** di un sottospazio di dimensione 3 in $\mathbb{R}^5$:

□ $\begin{cases} x+y+3z+t+u=0 \\ x-y+3t+u=0 \\ x+y-z+t+u=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y-2z+t+u=3 \\ x-y+3t+4u=0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ x-y+3t+u=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y-2z+t+u=0 \\ 2x+2y-4z+2t+2u=0 \end{cases}$

Domanda [`cartesianB`] Si determini quale fra le seguenti è una rappresentazione **cartesiana** di un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbb{R}^5$:

■ $\begin{cases} x+y+3z+t+u=0 \\ x-y+3t+u=0 \\ x+y-z+t+u=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y-2z+t+u=3 \\ x-y+3t+4u=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ x-y+3t+u=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z+u=0 \\ 2x+2y+2z+t+u=0 \end{cases}$

Domanda [`cartesianC`] Si determini quale fra le seguenti è una rappresentazione **cartesiana** di un sottospazio di dimensione 3 in $\mathbb{R}^5$:

□ $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-z+u=0 \\ x+y+z+t+u=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y-2z+t=1 \\ x-y-t=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ 2x+2y-4z+2t=0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x+y+3z+t=0 \\ x-y+3t+u=0 \end{cases}$

Domanda [`cartesianD`] Si determini quale fra le seguenti è una rappresentazione **cartesiana** di un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbb{R}^5$:

■ $\begin{cases} x+y+3z+t+u=0 \\ x-y+3t+2u=0 \\ x+y-z+t=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ x-y+z-t+u=0 \\ y+t=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+3t=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+y-2z+t+u=2 \\ x-y+t=0 \end{cases}$

Domanda [`linearA`] Sia $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $L\binom{1}{0}=5$ e $L\binom{1}{1}=7$. Allora $L\binom{0}{1}=\dots$

■ 2

□ 7

□ Con le informazioni date non è possibile effettuare il calcolo

□ 0

Domanda [`linearB`] Sia $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $L\binom{0}{1}=7$ e $L\binom{1}{1}=7$. Allora $L\binom{1}{0}=\dots$

■ 0

□ 7

□ Con le informazioni date non è possibile effettuare il calcolo

□ 2

Domanda [`linearC`] Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 3$ e $L\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 5$. Allora $L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \ldots$

- ■ 4
- □ 3
- □ Con le informazioni date non è possibile effettuare il calcolo
- □ -1

Domanda [`linearD`] Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 3$ e $L\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 5$. Allora $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \ldots$

- ■ -1
- □ 5
- □ Con le informazioni date non è possibile effettuare il calcolo
- □ 4

Domanda [`sistemaA`] Sia $AX = B$ un sistema lineare **non omogeneo** di 3 equazioni in 2 incognite. Assumendo che $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ siano soluzioni del sistema si stabilisca quale tra le seguenti affermazioni è corretta

- ■ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$.
- □ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema.
- □ L'insieme delle soluzioni del sistema coincide con $\operatorname{Span}(X_1, X_2)$.
- □ Nessuna delle altre risposte è corretta.

Domanda [`sistemaB`] Sia $AX = B$ un sistema lineare **non omogeneo** di 2 equazioni in 3 incognite. Assumendo che $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ siano soluzioni del sistema si stabilisca quale tra le seguenti affermazioni è corretta

- ■ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$.
- □ $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema.
- □ Il vettore nullo è soluzione del sistema.
- □ Nessuna delle altre risposte è corretta.

Domanda [`sistemaC`] Sia $AX = B$ un sistema lineare **non omogeneo** di 3 equazioni in 2 incognite. Assumendo che $X_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ siano soluzioni del sistema si stabilisca quale tra le seguenti affermazioni è corretta

- ■ Nessuna delle altre risposte è corretta.
- □ $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema.
- □ L'insieme delle soluzioni del sistema coincide con $\operatorname{Span}(X_1, X_2)$.
- □ Il nucleo di A contiene solo il vettore nullo.

Domanda [`sistemaD`] Sia $AX = B$ un sistema lineare **non omogeneo** di 2 equazioni in 3 incognite. Assumendo che $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ siano soluzioni del sistema si stabilisca quale tra le seguenti affermazioni è corretta

- ■ Il sistema ammette infinite soluzioni
- □ $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema.
- □ Il vettore nullo è soluzione del sistema.
- □ Nessuna delle altre risposte è corretta.