CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 febbraio 2019
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

$\lambda_2 = 0$ semplice, $\lambda_1 = 2$ con molteplicità 2. Semidefinita positiva.

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$q(x', y', z') = 2(x')^2 + 2(y')^2$

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

(c) Determinare il punto Q intersezione di r con π:

(d) Determinare la distanza di O da π.

$\pi\colon x+3y-2z=14,\qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R},$

$Q=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\qquad d(O,\pi)=d(O,Q)=\sqrt{14}$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX=B$, dove $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A=\begin{pmatrix}k-2 & 2 & 2-k & 2+k\\ -2 & k+2 & 4-k & 2+2k\\ -k & 2k & k & 3k\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}k\\2+k\\k\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k=-2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S\neq\emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
1	2	2	sì	2
2	2	3	no	–
resto	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A)=\begin{cases}3 \text{ se } k\neq 0,1,2\\ 2 \text{ se } k=0,1,2.\end{cases}$$

Risolubile per $k\neq 2$,

$\dim \mathrm{Sol}=2$ per $k=0,1$.

Soluzione per $k=-2$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\1\\1/2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	26 febbraio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.
   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).
   (b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.
   (c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

$\lambda_2 = -1$ doppio (con molteplicità 2), $\lambda_1 = 3$ semplice. Indefinita.
$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
$q(x', y', z') = 3(x')^2 - (y')^2 - (z')^2$

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:
   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:
   (c) Determinare il punto Q intersezione di r con π:

(d) Determinare la distanza di O da π.

$$\pi\colon x+y-3z=4, \qquad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -3 \end{pmatrix},$$

$$Q=\frac{4}{11}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -3 \end{pmatrix}, \qquad d(O,\pi)=d(O,Q)=\frac{4}{11}\sqrt{11}.$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX=B$, dove $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A=\begin{pmatrix} k+4 & 2k+4 & k & k+4\\ -k-4 & -4 & k & -k-4\\ k+8 & 3k+8 & k & 3k+8 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2k+4\\ -3k-4\\ 2k+8 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k=-2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	1	1	sì	3
-4	2	3	no	–
resto	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A)=\begin{cases} 3 \text{ se } k\neq -4,0\\ 1 \text{ se } k=0,\\ 2 \text{ se } k=-4. \end{cases}$$

Risolubile per $k\neq -4$,

$\dim \mathrm{Sol}=3$ per $k=0$.

Soluzione per $k=-2$:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2\\ -3\\ 5/2\\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -2\\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 febbraio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

$\lambda_2 = 1$ semplice, $\lambda_1 = 3$ con molteplicità 2. Definita positiva.

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad q(x', y', z') = 3(x')^2 + 3(y')^2 + (z')^2$$

Non esiste un X_0 non nullo su cui q si annulla, perchè, essendo definita positiva, $q(X) > 0$ per ogni X non nullo.

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

(c) Determinare il punto Q intersezione di r con π:

(d) Determinare la distanza di O da π.

$\pi\colon 3x+y+2z=7,\qquad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},$

$Q=\begin{pmatrix}3/2\\1/2\\1\end{pmatrix},\qquad d(O,\pi)=d(O,Q)=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX=B$, dove $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & k+1 & k+1 & k-3\\ 3-k & 2 & 3+k & 2k-4\\ 2-2k & 1-k & 1-k & 3k-3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1-k\\3-k\\1-k\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k=3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S\neq\emptyset$?	dim S
1	2	2	sì	2
0	2	2	sì	2
-1	2	3	no	–
resto	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A)=\begin{cases}3 \text{ se } k\neq 0,1,-1\\ 2 \text{ se } k=0,1,-1.\end{cases}$$

Risolubile per $k\neq -1$,

$\dim \mathrm{Sol}=2$ per $k=0,1$.

Soluzione per $k=3$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3/2\\1/2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**26 febbraio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

$\lambda_2 = 0$ semplice, $\lambda_1 = 2$ con molteplicità 2. Semidefinita positiva.

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$q(x', y', z') = 2(x')^2 + 2(y')^2$

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

(c) Determinare il punto Q intersezione di r con π:

(d) Determinare la distanza di O da π.

$$\pi\colon 3x+2y-z=6, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad d(O,\pi) = d(O,Q) = \frac{3}{7}\sqrt{14} = \frac{6}{\sqrt{14}}.$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & k & 4k-4 & 2k \\ k-2 & -k & -4 & -2k \\ k-2 & k+2 & 6k-4 & 6k-4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4k-4 \\ -6k+8 \\ 4k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
2	1	1	sì	3
0	2	3	no	–
resto	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 2, 0 \\ 1 \text{ se } k = 2, \\ 2 \text{ se } k = 0. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 3$ per $k = 2$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
