Geometria e Algebra Appello del 2 luglio 2019

☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**
☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**
☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**
☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**
☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**
☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**
☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**
☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**
☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**
☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**

$\longleftarrow$ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`openmetA`] Si enunci il teorema spettrale: ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`openmetB`] Si definisca la nozione di matrice ortogonale: ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [openmetC] Si definisca la nozione di complemento ortogonale di un sottospazio V in $\mathbb{R}^n$:

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [openmetD] Si enunci la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [openquestbasiA] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di una lista di generatori di $\mathbb{R}^4$ che non è formata da 4 vettori.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Domanda [`openquestbasiB`] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di una lista di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ che non è formata da 4 vettori.

□ **w** □ **p** □ **a** ■ **c**

Domanda [`openquestbasiC`] Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di una lista formata da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ che non è una lista di generatori di $\mathbb{R}^4$.

□ **w** □ **p** □ **a** ■ **c**

Domanda [`openquestbasiD`] Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di una lista di 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ che non sono linearmente indipendenti.

□ **w** □ **p** □ **a** ■ **c**

Domanda [`spantrevettA`] ♣ Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- ■ $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}) \subseteq \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$
- ■ $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u})$
- □ $\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v}_1$ per un dato $\alpha \in \mathbb{R}$
- □ $\operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u})$

Domanda [`spantrevettB`] ♣ Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $\boldsymbol{u} \notin \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [ ] $\boldsymbol{v}_1 = \alpha\, \boldsymbol{u}$ per un dato $\alpha \in \mathbb{R}$
- [x] $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) < \dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u})$
- [ ] $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}$ sono linearmente indipendenti
- [x] $\boldsymbol{u} \notin \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1)$

Domanda [`spantrevettC`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [x] $2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \sqrt{3}\boldsymbol{u}_3 \in U$
- [ ] Se $\boldsymbol{u}_3 \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ allora $\dim U = 2$
- [x] $\dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \leq \dim U$
- [x] $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_3) = U$

Domanda [`spantrevettD`] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere:

- [ ] $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \notin U$
- [ ] $\dim U = 3$
- [x] Se $\boldsymbol{u}_3 \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, allora $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$
- [x] $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \subseteq U$

Domanda [`fqA`] Si determini quale fra le seguenti funzioni è una forma quadratica definita positiva.

- [x] $q(x, y) = x^2 + y^2 - xy;$
- [ ] $q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy;$
- [ ] $q(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy;$
- [ ] $q(x, y) = x^2 + 2y.$

Domanda [`fqB`] Si determini quale fra le seguenti funzioni è una forma quadratica indefinita.

- [x] $q(x, y) = x^2 - 2y^2 - 2xy;$
- [ ] $q(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy;$
- [ ] $q(x, y) = -x^2 - 2y^2 + xy;$
- [ ] $q(x, y) = 3x - y^2.$

Domanda [`fqC`] Si determini quale fra le seguenti funzioni è una forma quadratica definita negativa.

- [x] $q(x, y) = -2x^2 - y^2 + 2xy;$
- [ ] $q(x, y) = -x^2 - 2y^2 - 4xy;$
- [ ] $q(x, y) = x^2 + y^2 + xy;$
- [ ] $q(x, y) = -x^2 - y.$

Domanda [`fqD`] Si determini quale fra le seguenti funzioni è una forma quadratica semi definita positiva.

- [x] $q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy;$
- [ ] $q(x, y) = x^2 + y^2 - xy;$
- [ ] $q(x, y) = x^2 - y^2 + xy;$
- [ ] $q(x, y) = y.$

Domanda [`coodivettoreA`] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$. Allora

☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}10/13\\-21/13\\14/13\end{pmatrix}$. ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1\\-9\\-2\end{pmatrix}$. ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$. ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.

Domanda [`coodivettoreB`] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{B} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. Allora

☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-5/13\\17/13\\-7/13\end{pmatrix}$. ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}4\\11\\6\end{pmatrix}$. ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}7\\11\\-6\end{pmatrix}$. ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Domanda [`coodivettoreC`] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$. Allora

☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1/13\\19/13\\-17/13\end{pmatrix}$. ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}$. ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$. ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Domanda [`coodivettoreD`] Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ il vettore che nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$. Allora

☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}4/13\\15/13\\-10/13\end{pmatrix}$. ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}5\\9\\4\end{pmatrix}$. ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$. ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Domanda [`diagA`] Sia $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Stabilire quale fra i seguenti vettori è autovettore per A.

☐ $\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Domanda [`diagB`] Sia $A = \begin{pmatrix}2 & 4 & 4\\2 & 0 & 2\\1 & 4 & 0\end{pmatrix}$. Stabilire quale fra i seguenti vettori è autovettore per A.

☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$.

Domanda [diagC] Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Stabilire quale fra i seguenti vettori è autovettore per A.

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- ■ $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Domanda [diagD] Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Stabilire quale fra i seguenti vettori è autovettore per A.

- ■ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Domanda [prodmatrixA] Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Allora:

- ■ $AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Domanda [prodmatrixB] Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Allora:

- ■ $AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Domanda [prodmatrixC] Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Allora:

- ■ $AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Domanda [prodmatrixD] Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Allora:

- ■ $AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Domanda [geomultA] ♣ Fissato $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, sia r la retta passante per i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- [x] La direzione di r è data da $\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}$.
- [ ] r è parallela al piano $\pi\colon x + y + 2z = 1$.
- [x] r giace nel piano $\pi\colon 3x - y - z = 0$.
- [ ] Il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a r

Domanda [geomultB] ♣ Fissato $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, sia r la retta passante per i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- [x] r è perpendicolare al piano $\pi\colon x + y + 2z = 1$.
- [ ] r passa per l'origine O.
- [ ] r è parallela alla retta $s\colon x + 2y + z = y - z = 0$.
- [ ] La direzione di r è data da $\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + 3\hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Domanda [geomultC] ♣ Fissato $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, sia r la retta passante per i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- [ ] La direzione di r è data da $\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$.
- [x] r è parallela al piano $\pi\colon x + 2y + z = 0$.
- [ ] r giace nel piano $\pi\colon 3x - y - z = 0$.
- [x] Il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a r

Domanda [geomultD] ♣ Fissato $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, sia r la retta passante per i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- [x] r è perpendicolare al piano $\pi\colon 2x - 2y + 2z = 1$.
- [ ] r passa per l'origine O.
- [ ] r è ortogonale alla retta $s\colon x + y = y + z = 0$.
- [x] La direzione di r è data da $\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$.