CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	2 luglio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & k \\ 1-k & -1-2k & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+k \\ 0 \\ 2k+1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
-1	2	3	no	
resto	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, -1 \\ 2 \text{ se } k = 0, -1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -1$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ -1/6 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta.

(a) Autovalori di A: 1 con $\mu = 2$, $m = 1$, 2 con $\mu = m = 1$.

(b) $V_1(A) = \{x + y = z = 0\}$. $V_2(A) = \{x = z = 0\}$.

(c) $V_1(A) = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $V_2(A) = \text{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) A e B non sono simili, perché B è diagonalizzabile, mentre A non lo è.

---

3. **(8 pt)** Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

(b) Determinare una base del sottospazio $\text{Im}\, L$:

(c) Determinare una base del sottospazio $\text{Ker}\, L$:

(d) Determinare una base di $(\text{Im}\, L)^\perp$, complemento ortogonale di $\text{Im}\, L$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Base di $\text{Im}\, L$ = prime due colonne di A

Base di $\text{Ker}\, L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base di $(\text{Im}\, L)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**2 luglio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k \\ -1-k & k & 2-k & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k+2 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
1	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 1 \\ 2 \text{ se } k = 0, 1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1$, $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 0$. Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

---

2. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta.

(a) Autovalori di A: 1 con $\mu = m = 2$, 2 con $\mu = m = 1$.

(b) $V_1(A) = \{x = 0\}$. $V_2(A) = \{x + z = y = 0\}$.

(c) $V_1(A) = \text{Span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$. $V_2(A) = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

(d) A e B sono simili, perché hanno lo stesso polinomio caratteristico e sono entrambe diagonalizzabili. $N = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

---

3. **(8 pt)** Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

(b) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare una base di $(\operatorname{Ker} L)^{\perp}$, complemento ortogonale di $\operatorname{Ker} L$:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\2 & 2 & 1 & 2\\-1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Base di $\operatorname{Im} L$ = ultime due colonne di A

Base di $\operatorname{Ker} L = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Base di $(\operatorname{Ker} L)^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**2 luglio 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ $\boxed{\textbf{Scrivere in modo \underline{LEGGIBILE} nome e cognome!}}$ $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ k & 2 & -3+2k & -1 \\ 1 & 0 & 2 & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3+2k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-1	2	3	no	–
2	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -1, 2 \\ 2 \text{ se } k = -1, 2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -1$, $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 2$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 7/6 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7/4 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta.

(a) Autovalori di A: -4, -1, 0 tutti con $\mu = m = 1$.

(b) $V_{-4}(A) = \{x = z = 0\}$.
$V_{-1}(A) = \{y + z = x + 2z = 0\}$.
$V_0(A) = \{x + z = y = 0\}$.

(c) $V_{-4}(A) = \text{Span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$. $V_{-1}(A) = \text{Span}\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\}$. $V_0(A) = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$.

(d) A e B non sono simili perché hanno stessi autovalori diversi.

---

3. **(8 pt)** Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$L\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

(b) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare una base di $(\operatorname{Im} L)^\perp$, complemento ortogonale di $\operatorname{Im} L$:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Base di $\operatorname{Im} L$ = ultime due colonne di A

Base di $\operatorname{Ker} L = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Base di $(\operatorname{Im} L)^\perp = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	2 luglio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -k & 3-k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ k-2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
2	2	3	no	–
1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, 2 \\ 2 \text{ se } k = 1, 2 \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 2$, $\dim \text{Sol} = 2$ per $k = 1$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 2 \\ -2/3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8 pt)** Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se la matrice B è simile alla matrice A; in caso positivo esibire una matrice invertibile N tale che $B = N^{-1}AN$. In caso negativo giustificare la risposta.

(a) Autovalori di A: 1 con $\mu = m = 1$, 2 con $\mu = m = 2$.

(b) $V_1(A) = \{x - 2y = y + z = 0\}$. $V_2(A) = \{x + z = 0\}$.

(c) $V_1(A) = \text{Span}\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. $V_2(A) = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) A e B non sono simili perché sono entrambe diagonalizzabili, e hanno gli stessi autovalori, ma le molteplicità sono diverse.

---

3. **(8 pt)** Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(a) Determinare la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

(b) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Im} L$:

(c) Determinare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare una base di $(\operatorname{Ker} L)^\perp$, complemento ortogonale di $\operatorname{Ker} L$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Base di $\operatorname{Im} L$ = ultime due colonne di A

Base di $\operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Base di $(\operatorname{Ker} L)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
