CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3+k & k & 4 & -3-k \\ k-1 & -3k & 2k-1 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+k \\ 4+k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
3/2	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 3/2 \\ 2 \text{ se } k = 0, 3/2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 3/2$,

$\dim \text{Sol} = 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

(a) $P_A(t) = -t(1+t)^2 = -t^3 - 2t^2 - t$

(b) Autovalori di A: 0 con $\mu = m = 1$, -1 con $\mu = m = 2$.

(c) $V_0(A) = \{x - z = y - 3x = 0\} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $V_{-1}(A) = \{x - y + 3z = 0\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(d) Sì A è diagonalizzabile: $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ t+1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2x + 2 = 0. \end{cases}$$

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O. $\pi\colon x + 2y + z = 0.$

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π. $P_0' = P_1' = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π. $\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k-2 & -3k & k-2 \\ 6+k & 8 & k & 6+k \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3k \\ k-5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

   (d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
3	2	2	sì	2
0	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 3 \\ 2 \text{ se } k = 0, 3. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$,

Non esiste k tale che $\dim \mathrm{Sol} = 3$.

Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 17/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

(a) $P_A(t) = -t^3 + t^2$

(b) Autovalori di A: 0 con $\mu = 2$, $m = 1$, 1 con $\mu = m = 1$.

(c) $V_0(A) = \{y - 2x = z - 3x = 0\} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $V_1(A) = \{x - y = 2x - z = 0\} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) No A è non diagonalizzabile: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 2t-1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O. $\pi\colon x + y + 2z = 0.$

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π. $P_0' = P_1' = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 1/6 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π. $\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 7+2k & 2k+1 & -7-2k & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2k-1 & -6k-3 & 1-2k & 4k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3+k \\ k \\ 3-k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
1	2	2	sì	2
-1/2	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, -1/2 \\ 2 \text{ se } k = 1, -1/2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -1/2$,

$\dim \text{Sol} = 2$ per $k = 1$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

(a) $P_A(t) = -t^2(t-2) = -t^3 + 2t^2$

(b) Autovalori di A: 0 con $\mu = m = 2$, 2 con $\mu = m = 1$.

(c) $V_2(A) = \{x - 2z = y - 3z = 0\} = \text{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $V_0(A) = \{x - y + 3z = 0\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(d) Sì A è diagonalizzabile: $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t \\ 2t+1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O. $\quad \pi\colon 2x + y + 2z = 0.$

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π. $\quad P_0' = P_1' = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 1/9 \\ -4/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}.$

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π. $\quad \frac{4}{3}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ k & -k & 2+2k & -3k-6 \\ 8+k & -8-k & 8 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-k \\ -3 \\ 3-3k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-2	2	2	sì	2
1	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, -2 \\ 2 \text{ se } k = 1, -2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1$,

Non esiste k per cui $\dim \mathrm{Sol} = 3$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \\ -3 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

(a) $P_A(t) = -t^2(t-2) = -t^3 + 2t^2$

(b) Autovalori di A: 0 con $\mu = 2$, $m = 1$, 2 con $\mu = m = 1$.

(c) $V_2(A) = \{x - y = 2x - z = 0\} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$V_0(A) = \{3x - y = 4x - z = 0\} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(d) No, N non esiste perché A non è diagonalizzabile. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ 2t \\ t-1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x - 3z - 4 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O. $\pi\colon 3x + 2y + z = 0$.

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π. $P_0' = P_1' = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 4/7 \\ -2/7 \\ -8/7 \end{pmatrix}$.

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π. $\dfrac{2}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$.